Studienkolleg
an der RWTH Aachen

STUDIENHEFT ZUR VEKTORRECHNUNG

zusammengestellt von
Franz Josef Mohren

8. Auflage 1993

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Die Vektorrechnung wurde um die Mitte des vorigen Jahrhunderts von dem Mathematiker Hermann Graßmann (1809-1877) und dem Physiker William Robert Hamilton (1805-1865) begründet. Beide haben etwa gleichzeitig, aber unabhängig voneinander und von verschiedenen Aspekten ausgehend, die Vektorrechnung entwickelt. Während die Ideen von Graßmann und Hamilton zunächst wenig Beachtung fanden, hat die Vektorrechnung in diesem Jahrhundert sehr stark an Bedeutung und Verbreitung gewonnen. Wenn von mathematischen Strukturen gesprochen wird, so darf dabei heute der Vektorbegriff nicht mehr ausgeklammert werden.

Viele räumlich-geometrische, physikalische und technische Zusammenhänge lassen sich vektoriell beschreiben. Da die Vektorrechnung meist eine übersichtliche und anschauliche Darstellung der Probleme ermöglicht, wird sie sehr häufig eingesetzt und angewendet. Für den Schüler und Studienanfänger ist es daher sehr wichtig, möglichst frühzeitig mit den Methoden und Denkweisen der Vektorrechnung vertraut zu werden.

Diese Schrift ist zunächst konzipiert als unterrichtsbegleitendes Studienheft für den Unterricht am Studienkolleg der RWTH Aachen. Daraus ergab sich auch die Stoffanordnung: Die Definition und Herleitung der Vektoroperationen wurde vorangestellt, um sie für den gleichzeitig und parallellaufenden Physikunterricht bereitzustellen.

Entfällt dieser Gesichtspunkt, so kann die Reihenfolge leicht verändert werden. Die Parameterformen der Geraden- und Ebenengleichungen können zum Beispiel im Anschluß an die Addition, Subtraktion und S-Multiplikation behandelt werden. Im Anschluß an das Skalarprodukt können die Normalformen besprochen werden. Auf diese Weise ergeben sich eine Vielfalt von Anwendungs- und Übungsbeispielen direkt zu den jeweiligen Operationen.

Dieses Heft kann auch von Schülern und Studenten in Anfangssemestern zum Selbststudium benutzt werden. Auch aus diesem Grund wurden viele Beispiele vollständig durchgerechnet und an die einzelnen Kapitel Übungsaufgaben angefügt. Ergebnisse und zum Teil ausführliche Lösungen befinden sich am Ende des Heftes.

Die redaktionelle Arbeit übernahm Kollege Herr Dr. Heinz Pauly, dem viele Anregungen und Verbesserungsvorschläge zu verdanken sind.

Die Ausführung der Zeichnungen sowie das Kennzeichnen der Determinanten, Vektoren u.ä. übernahm freundlicherweise Herr Kollege Norbert Höhne.

1 Skalare und vektorielle Grössen

In Naturwissenschaft und Technik gibt es Größen, die durch Angabe der Maßeinheit und der Maßzahl festgelegt sind. Maßeinheit und Maßzahl bestimmen den Betrag der Größe. Solche Größen, die allein durch die Angabe ihres Betrages bestimmt sind, nennt man Skalare oder skalare Größen. Die Zeit, die Temperatur, die Masse zum Beispiel sind skalare Größen.

Begriff des Skalars

r Skalar
skalar
skalare Größe

Andere Größen dagegen sind erst festgelegt, wenn neben der Maßeinheit und der Maßzahl auch Richtung und Orientierung (Richtungssinn) bekannt sind. Man nennt solche Größen, die Betrag, Richtung und Orientierung besitzen, vektorielle Größen. Vektorielle Größen sind zum Beispiel die Kraft, die Geschwindigkeit, die magnetische Feldstärke.

Begriff des Vektors

r Vektor
vektoriell
vektorielle Größe

Im folgenden werden Vektoren als Objekte der Mathematik betrachtet und entsprechend definiert. Dies macht zunächst noch eine Unterscheidung notwendig. Der Mathematiker ist in seinen Axiomen und Definitionen freier als der Naturwissenschaftler bzw. Physiker. In der Mathematik muß ein Begriffsystem in sich logisch und widerspruchsfrei sein. Diesen Ansprüchen müssen auch Axiome, Definitionen und daraus sich ergebende Deduktionen in der Physik genügen. Darüber hinaus müssen sie aber auch mit den Bedingungen und Gesetzmäßigkeiten in der Natur in Einklang sein.

1.1 Definition der vektoriellen Grösse

> Eine vektorielle Größe ist eine Größe, die durch Betrag, Richtung und Orientierung festgelegt ist.

Definition des Vektors

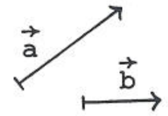
Bei physikalischen Größen ist zur Bestimmung des Betrages neben der Angabe der Maßzahl auch die Angabe der Einheit notwendig.
Kürzer, abstrakter und für die Mathematik ausreichend ist

die folgende Definition:

> Ein Vektor ist eine gerichtete, orientierte Strecke.

Diese gerichtete, orientierte Strecke kann dargestellt werden durch einen Pfeil. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag des Vektors an. Die Spitze des Pfeils zeigt die Orientierung des Vektors an.

Darstellung des Vektors



Die letztere Definition des Vektors ist die Definition des sogenannten freien Vektors. Der Pfeil darf in der Ebene bzw. im Raum beliebig parallel verschoben werden.
Im Unterschied dazu treten häufig - sowohl in der Mathematik als auch in der Physik - die sogenannten gebundenen Vektoren auf.

freie Vektoren

gebundene Vektoren

Vektoren, die ihren Anfangspunkt in einem festen Punkt - etwa dem Ursprung des Koordinatensystems - haben, und zu beliebigen Punkten des Raumes oder der Ebene führen, heißen Ortsvektoren. Diese Ortsvektoren sind mit ihrem Anfangspunkt an den festen Punkt gebunden.

r Ortsvektor

Auch in der Physik hat man es sehr häufig mit gebundenen Vektoren zu tun. So kann zum Beispiel der Angriffspunkt einer Kraft nicht beliebig verändert werden, ohne daß sich dabei die Wirkung der Kraft ändert. Oft darf der Angriffspunkt auf einer Geraden, der sogenannten Wirkungslinie, verschoben werden. Der Vektor ist an diese Gerade "gebunden". Man spricht in diesem Fall auch von einem "linienflüchtigen" Vektor.

Im folgenden spielen die gebundenen Vektoren zunächst eine untergeordnete Rolle. Erst später im dritten Kapitel bei der vektoriellen Geometrie des Raumes und der Ebene werden gebundene Vektoren - vor allen Dingen Ortsvektoren - benutzt.

In diesem Studienheft werden nur algebraische Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation) für Vektoren definiert. Man nennt dieses Teilgebiet der Vektorrechnung Vektoralgebra. Werden auch noch Differential- und Integralrechnung einbezogen, spricht man von Vektoranalysis. Dieses Heft beschränkt sich auf die Vektoralgebra und einige dazu gehörige Anwendungen.

Wegen der aufgezeigten Unterschiede zur mathematischen Definition des Vektors spricht man bei Größen, auf die der Vektorbegriff anwendbar ist und die durch Vektoren dargestellt werden können, besser von vektoriellen Größen. Geschwindigkeit, Kraft, Feldstärke etc. sind vektorielle Größen.

In diesem Studienheft werden Vektoren mit kleinen lateinischen Buchstaben und darübergesetzten Pfeilen geschrieben: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. Falls erforderlich oder sinnvoll, werden zur weiteren Unterscheidung noch Indizes benutzt.

In Anwendungen, insbesondere in Aufgaben ist es üblich zur Kennzeichnung des Vektors Anfangs- und Endpunkte des Vektors zu verwenden. Für den Vektor von A nach B schreibt man so kurz $\vec{AB}$.

Wenn man nur den Betrag eines Vektors angeben will, schreibt man $|\vec{a}|$. Dabei führt man die Abkürzung $|\vec{a}| = a$ ein. Es gilt $a \geq 0$.

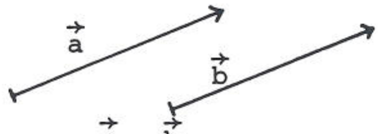
2 VEKTOROPERATIONEN

2.1 GLEICHHEIT VON VEKTOREN

gleiche Vektoren

Aus der Definition von Vektoren ergibt sich: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dann und nur dann gleich, wenn sie in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen. Man schreibt dann

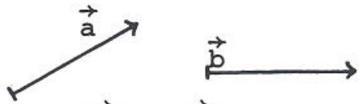
$$\vec{a} = \vec{b}$$



$\vec{a} = \vec{b}$

Wenn zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nur in ihrem Betrag übereinstimmen, so heißt das, daß die entsprechenden Pfeile gleiche Länge, nicht aber auch unbedingt gleiche Richtung haben. Es gilt dann

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

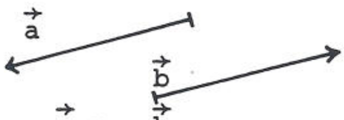


$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

r Gegenvektor

Wenn zwei Vektoren den gleichen Betrag und die gleiche Richtung aber entgegengesetzte Orientierung haben, so schreibt man

$$\vec{a} = -\vec{b}$$



$\vec{a} = -\vec{b}$

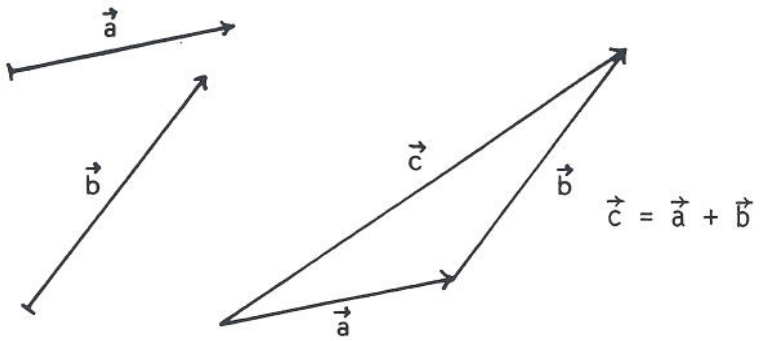
$\vec{b}$ heißt Gegenvektor von $\vec{a}$ und umgekehrt.
($\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = -\vec{a}$; merke auch $\vec{AB} = -\vec{BA}$)

2.2 ADDITION VON VEKTOREN

vektorielle Addition

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man den Vektor $\vec{b}$ parallel verschiebt, sodaß der Anfangspunkt von $\vec{b}$ in den Endpunkt von $\vec{a}$ fällt (siehe Skizze). Der Vektor vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ ist die Summe $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. $\vec{c}$ heißt auch Resultierende oder resultierender Vektor.

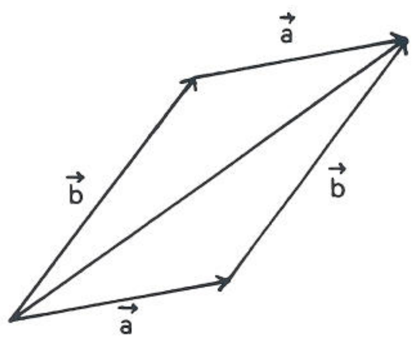
e Resultierende
resultieren
resultierend



Für die Addition von Zahlen gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz. Es ist nicht schon dadurch, daß die Vektoraddition der Zahlenaddition formal nachgebildet ist, selbstverständlich, daß diese Gesetze auch für Vektoren gelten. Die Gültigkeit dieser Gesetze muß im Einzelfall jeweils bewiesen werden.

Dem folgenden Bild entnimmt man:

Kommutativgesetz

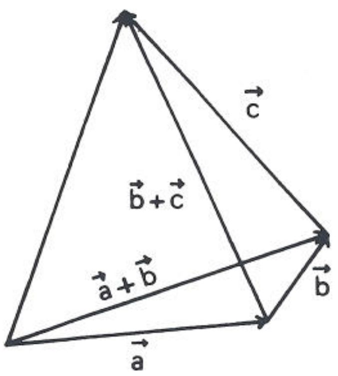


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

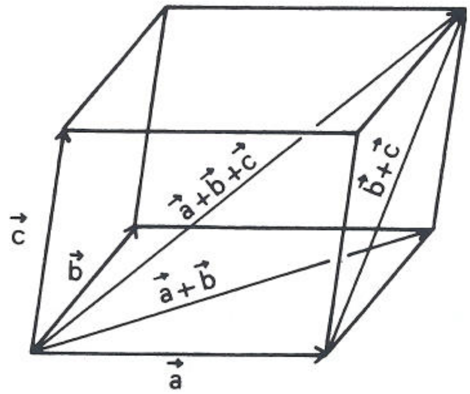
Bei der Addition von Vektoren gilt das Kommutativgesetz, d.h. es gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Nicht viel schwieriger ist der Nachweis für die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes. Hier muß allerdings berücksichtigt werden, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nicht alle drei in einer Ebene liegen müssen. Man kann aber an den folgenden Bildern ablesen:

Assoziativgesetz



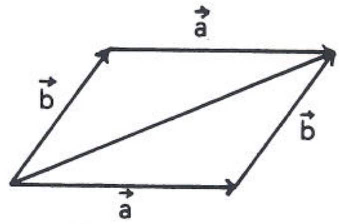
$(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$



$(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$

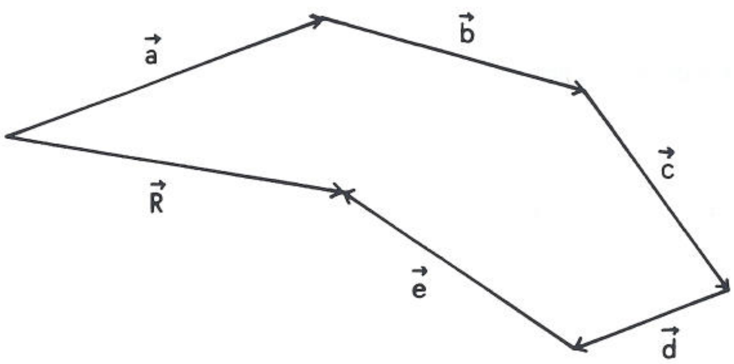
Bei der Addition von Vektoren gilt das Assoziativgesetz, d.h. es gilt $(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$. Man kann deshalb die Summe von drei und mehr Vektoren ohne Klammern schreiben. Der Beweis dieser beiden Gesetze kann später - nach Einführung der Koordinatendarstellung - auf das Rechnen mit Zahlen zurückgeführt werden.

Wenn die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Kräfte darstellen, dann bezeichnet man die nebenstehende Figur als Kräfteparallelogramm.



s Kräfteparallelogramm

Die Definition der Addition von zwei Vektoren kann auf mehrere Vektoren übertragen werden. Die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes wird dabei vorausgesetzt.



$\vec{R}$ ist die Resultierende oder die Summe der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$. Man schreibt:

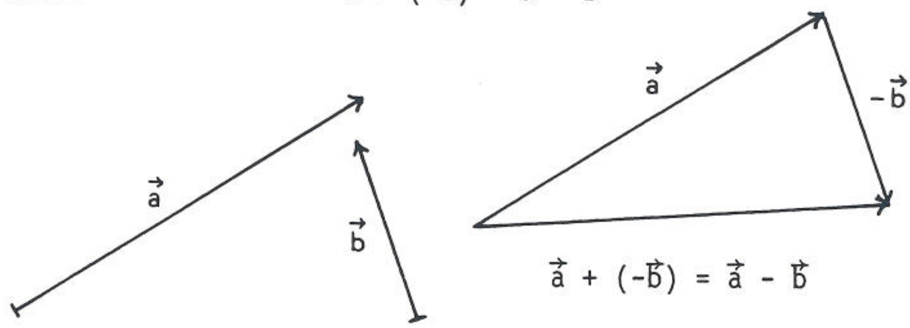
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}.$$

2.3 SUBTRAKTION VON VEKTOREN

vektorielle Subtraktion

Die Subtraktion zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird definiert als die Addition von $\vec{a}$ mit dem Gegenvektor von $\vec{b}$. Der Gegenvektor von $\vec{b}$ ist der Vektor $-\vec{b}$.

Also: $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$



Mit dieser Definition kann auch die folgende Vektorgleichung eindeutig nach $\vec{x}$ aufgelöst werden. Wenn

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$$

gilt, dann folgt mit der Anwendung des assoziativen Gesetzes

$$(\vec{a} + \vec{x}) - \vec{a} = \vec{b} - \vec{a}$$

Daraus erhält man

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$$

Als Sonderfall ergibt sich

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{a}$$
$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{o}$$

Man bezeichnet den Vektor $\vec{o}$ als Nullvektor. Der Nullvektor ist ein Vektor mit dem Betrag 0.

r Nullvektor

2.3.1 Aufgaben

A. 1

Ist $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ *allgemeingültig?*

A. 2

Wann gilt $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ *?*

Wann gilt $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ *?*

A. 3

Wann gilt $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ *?*

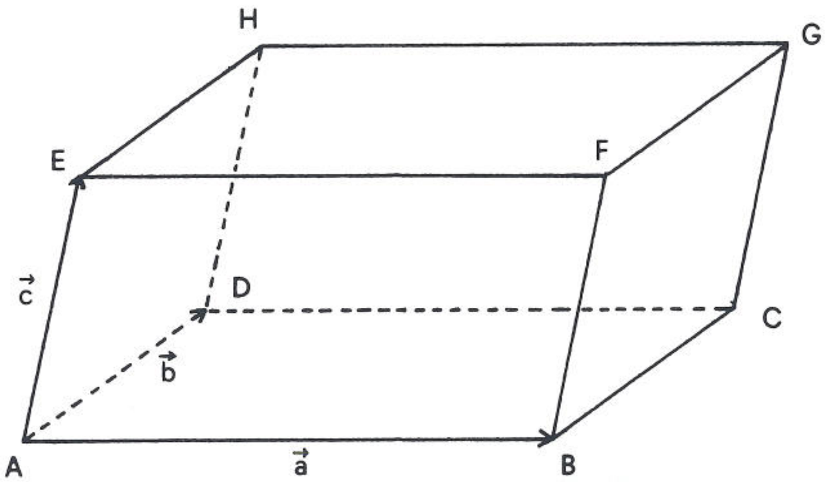
A. 4

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *sollen gleiche Richtung und Orientierung haben. Bestimmen Sie* $|\vec{a} + \vec{b}|$ *und* $|\vec{a} - \vec{b}|$ *, wenn* $|\vec{a}| = 3$ *und* $|\vec{b}| = 5$.

A. 5

Durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *wird ein Spat aufgespannt. Bestimmen Sie*

r Spat



$\vec{AC}$, $\vec{DB}$, $\vec{FC}$, $\vec{AG}$, $\vec{HB}$, $\vec{GE}$ *mit Hilfe von* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

A. 6

Die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ *und* $\vec{F}_2$ *sollen im Punkt P angreifen. Es sei:*

$|\vec{F}_1| = 5\ N$, $|\vec{F}_2| = 4\ N$ $\quad \sphericalangle (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 50^\circ$

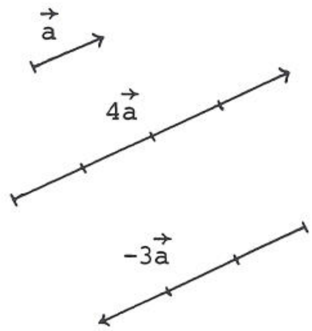
Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$. *Für die zeichnerische Lösung gelte* $1\ N \hat{=} 1\ cm$.

2.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar - S-Multiplikation -

S-Multiplikation

Für die Summe $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ schreibt man abgekürzt $4\vec{a}$. Es ist also $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 4\vec{a}$. Der Vektor $4\vec{a}$ ist daher ein Vektor, der die Richtung und Orientierung des Vektors $\vec{a}$ hat und dessen Betrag $|4\vec{a}| = 4|\vec{a}|$ ist. Nach diesen Erklärungen ist der Vektor $-3\vec{a}$ ein Vektor, der Richtung und Orientierung des Gegenvektors von $\vec{a}$ hat und dessen Betrag $3|-\vec{a}| = 3|\vec{a}|$ ist. Es gilt also $-3\vec{a} = 3(-\vec{a})$.

$4\vec{a}$, $-3\vec{a}$



Daraus ergibt sich die Definition des Vektors $\lambda\vec{a}$, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda\vec{a}$

> $\lambda\vec{a}$ ist ein Vektor, der die Richtung von $\vec{a}$ hat und der den $|\lambda|$-fachen Betrag von $\vec{a}$ hat. Der Vektor $\lambda\vec{a}$ ist also in der Pfeildarstellung λ-mal so lang wie $\vec{a}$. Wenn $\lambda > 0$ ist, dann ist $\lambda\vec{a}$ ein Vektor, der dieselbe Richtung und Orientierung hat wie $\vec{a}$.
> Wenn $\lambda < 0$ ist, dann hat $\lambda\vec{a}$ dieselbe Richtung und Orientierung wie der Gegenvektor von $\vec{a}$.
> Für den Sonderfall $\lambda = 1$ gilt $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
> Weiterhin gilt $0\vec{a} = \vec{0}$ (Nullvektor).

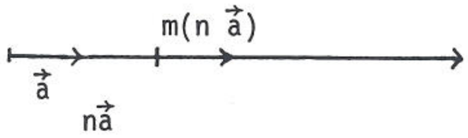
Für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird festgelegt, daß das Kommutativgesetz gilt. Es soll also sein: $\lambda\vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$.
Es handelt sich hierbei um eine nicht beweisbare Vereinbarung, da $\vec{a} \cdot \lambda$ nicht definiert wurde (Axiom).

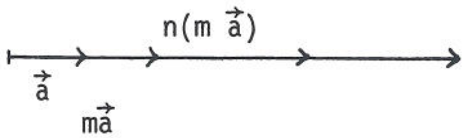
Die folgenden drei Gesetze sind jedoch beweisbar:

1. $m(n\,\vec{a}) = n(m\,\vec{a}) = (m \cdot n)\vec{a} = m \cdot n\,\vec{a}$ Assoziativgesetz
2. $(m+n)\vec{a} = m\,\vec{a} + n\,\vec{a}$ 1. Distributivgesetz
3. $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\,\vec{a} + m\,\vec{b}$ 2. Distributivgesetz.

Es gibt also bei dieser Art der Multiplikation zwei Distributivgesetze. Weiter muß beachtet werden, daß in den auftretenden Produkten nur ein Faktor ein Vektor sein darf, da bisher ein Produkt aus zwei Vektoren noch nicht definiert ist.

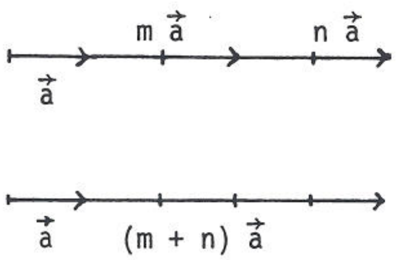
Die Richtigkeit des assoziativen Gesetzes kann man aus folgendem Bild ablesen: (für m = 2, n = 3; allgemein ebenso)



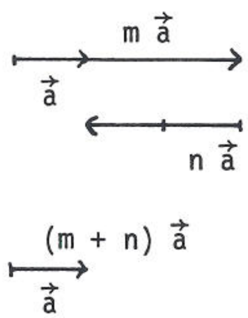


Die Gültigkeit dieses Gesetzes ergibt sich hier aus der Definition des Produktes $\lambda\vec{a}$.

Auch der Beweis für die Formel 2 kann leicht aus einem Bild abgelesen werden:

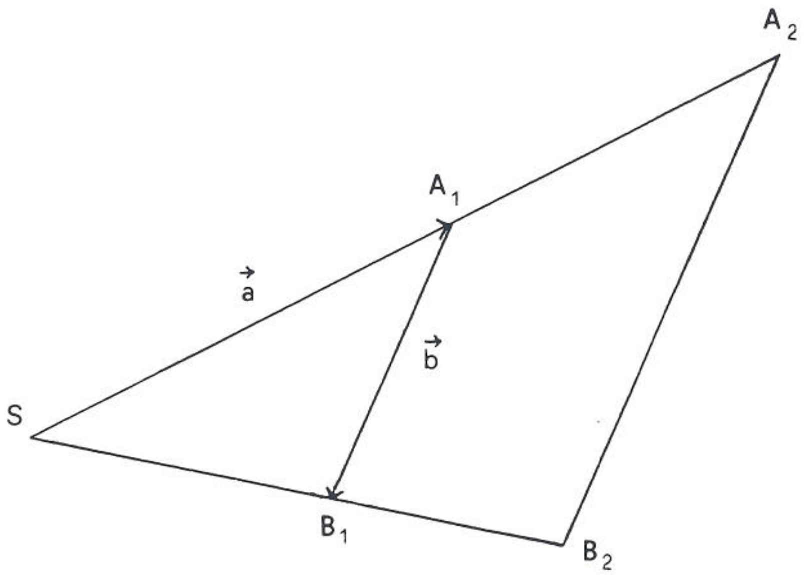


wenn m, n > 0



wenn m > 0 und n < 0

Der Beweis für das 2. Distributivgesetz kann leicht mit Hilfe des Strahlensatzes geführt werden.



Es wird als bekannt vorausgesetzt

$$\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = m$$

also $\overline{SA_2} = m\,\overline{SA_1}$, $\overline{SB_2} = m\,\overline{SB_1}$, $\overline{A_2B_2} = m\,\overline{A_1B_1}$

Setzt man nun $\overrightarrow{SA_1} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}$

so erhält man:

$$\overrightarrow{SB_1} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{SB_2} = m(\vec{a}+\vec{b})$$

nun ist aber:

$$\overrightarrow{SB_2} = \overrightarrow{SA_2} + \overrightarrow{A_2B_2} \quad \text{also} \quad m(\vec{a}+\vec{b}) = m\,\vec{a} + m\,\vec{b}$$

w.z.b.w.

2.4.1 Einheitsvektoren

Wichtig sind Vektoren, die den Betrag 1 haben. Man nennt solche Vektoren Einheitsvektoren. Einheitsvektoren werden besonders gekennzeichnet: $\vec{a}^o$ (gelesen "a oben 0") oder durch den Buchstaben $\vec{e}$ (eventuell mit Index).

r Einheitsvektor

> $\vec{a}^o$ ist ein Vektor, der die Richtung und Orientierung von $\vec{a}$ hat, dessen Betrag aber gleich 1 ist.
>
> $$|\vec{a}^o| = 1$$

$\vec{a}^o$ heißt Einheitsvektor von $\vec{a}$.

Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^o = a \cdot \vec{a}^o$$

oder

$$\vec{a}^o = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} \quad \text{falls } |\vec{a}| \neq 0$$

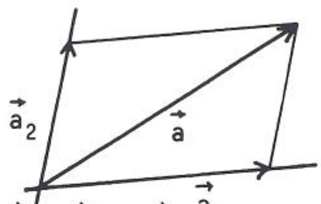
Man kann also jeden Vektor mit Hilfe seines Betrages und seines Einheitsvektors schreiben.

$$\vec{a} = 3\,\vec{a}^o$$

bedeutet, daß $\vec{a}$ den Betrag 3 hat.

2.4.2 ZERLEGUNG EINES VEKTORS IN KOMPONENTEN

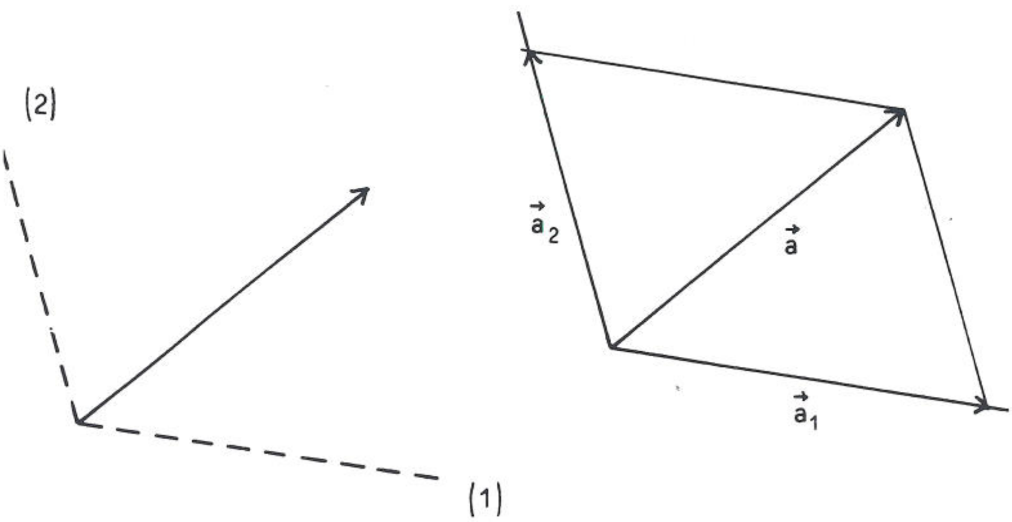
e Vektorzerlegung



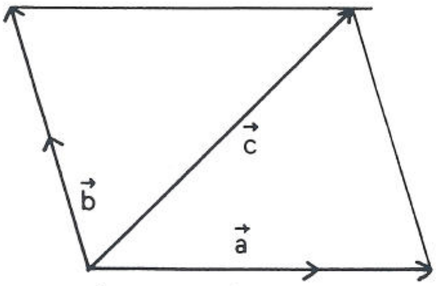
$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

e Komponente
e Vektorkomponente

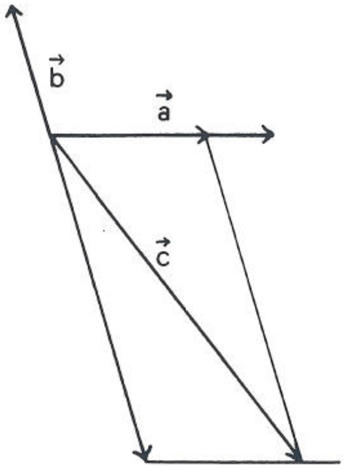
Zwei oder mehr Vektoren kann man zu einem resultierenden Vektor addieren. Umgekehrt kann man einen Vektor $\vec{a}$ in zwei oder mehr Vektoren zerlegen, die dann bei der Addition wieder den ursprünglichen Vektor ergeben müssen. Man nennt diese Vektoren, in die ein Vektor zerlegt wird, Komponenten des Vektors. Diese Zerlegung ist immer eindeutig. Wie das untenstehende Bild zeigt, handelt es sich bei dieser Zerlegung um die Umkehrung der Addition. Man zeichnet durch den Endpunkt von $\vec{a}$ die Parallelen zu den gegebenen Richtungen. In den Schnittpunkten der Parallelen mit dem jeweils anderen Richtungsstrahl erhält man die Endpunkte der Komponenten $\vec{a}_1$ bzw. $\vec{a}_2$ von $\vec{a}$.



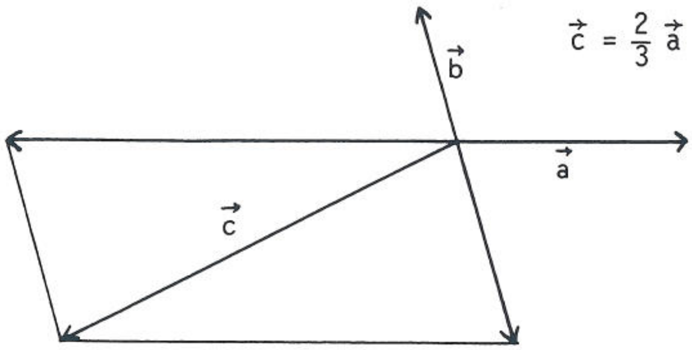
Die folgenden Beispiele zeigen die Zerlegung eines Vektors $\vec{c}$ in die Richtungen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind in allen Beispielen gleich.



$\vec{c} = 1{,}5\,\vec{a} + 2\vec{b}$



$\vec{c} = \frac{2}{3}\,\vec{a} - \frac{5}{2}\,\vec{b}$



$\vec{c} = -\,2\vec{a} - 1{,}5\,\vec{b}$

2.4.3 Aufgaben

A. 7

Zeigen Sie, daß der Vektor $\vec{a}^{\,o} + \vec{b}^{\,o}$ *die Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels* α *zwischen den Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *hat.*

A. 8

a) *Zeigen Sie, daß* $|\vec{a}^{\,o}| + |\vec{b}^{\,o}| = |\vec{a}^{\,o} + \vec{b}^{\,o}|$ *nicht allgemeingültig ist.*

b) *Wann gilt* $|\vec{a}^{\,o}| + |\vec{b}^{\,o}| = |\vec{a}^{\,o} + \vec{b}^{\,o}|$ *?*

A. 9

Zeigen Sie, daß die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden.

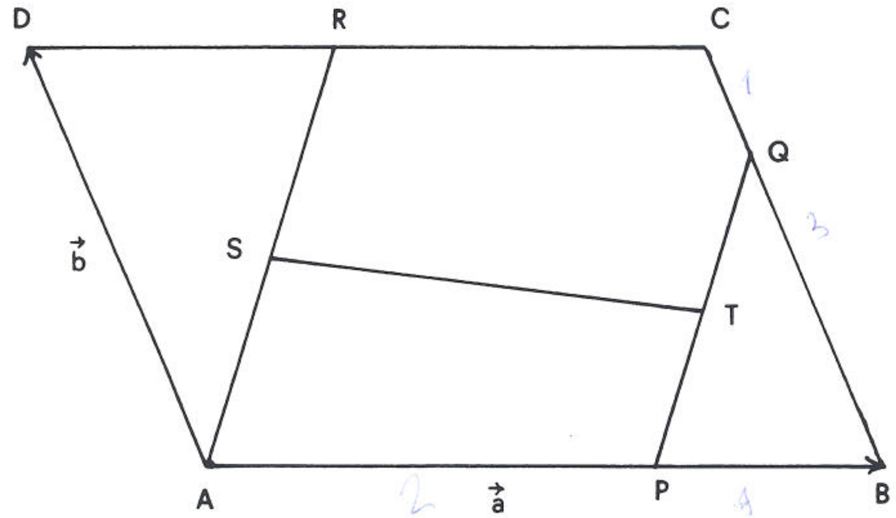
A. 10

Welche der folgenden Gleichungen sind falsch? Welche sind richtig? Welche können richtig sein?

1) $\vec{a} = 3\vec{b}$	2) $\vec{a}^o = 1$
3) $\vec{a}^o = -\vec{b}^o$	4) $\vec{a} - 2 = \vec{b}$
5) $\lvert\vec{a}^o\rvert = \lvert\vec{b}^o\rvert$	6) $\lvert\vec{a}^o\rvert - \lvert\vec{b}^o\rvert = \lvert\vec{a}^o - \vec{b}^o\rvert$

A. 11

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf. P teilt $\overline{AB}$ von A aus im Verhältnis 2:1. Q teilt $\overline{BC}$ von B aus im Verhältnis 3:1 (siehe Skizze). Drücken sie den Vektor $\vec{PQ}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus. $\overline{AR}$ ist parallel zu $\overline{PQ}$ und trifft $\overline{CD}$ in R. In welchem Verhältnis von D aus teilt R die Strecke $\overline{DC}$? S und T sind die Mittelpunkte von $\overline{PQ}$ und $\overline{AR}$. Drücken Sie $\vec{ST}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



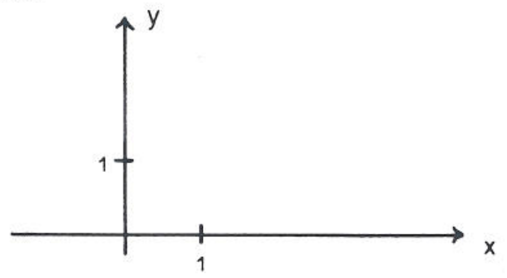
2.4.4 Koordinatendarstellung eines Vektors

Ein wichtiger Sonderfall der Vektorzerlegung ist die Zerlegung eines Vektors im Koordinatensystem in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen. Jeder Vektor, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt, kann auf diese Weise eindeutig zerlegt werden.

Bezüglich der Wahl des Koordinatensystems wird folgende Vereinbarung getroffen:

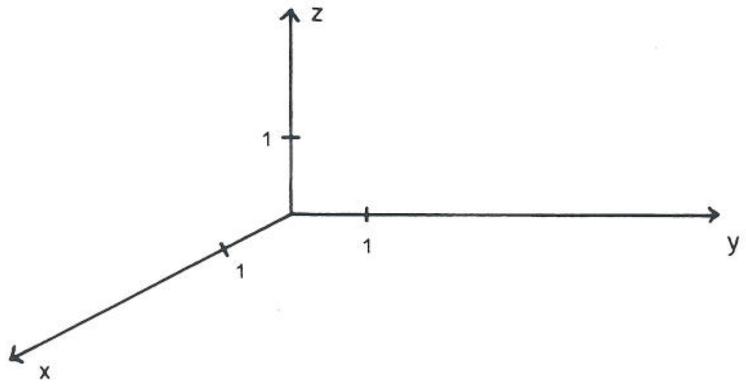
a) Das ebene Koordinatensystem

Der Winkel zwischen x- und y-Achse soll 90^0 betragen. Die Achsen werden so angeordnet, daß sich die x-Achse im Gegenuhrzeigersinn auf kürzestem Wege in die y-Achse drehen läßt.



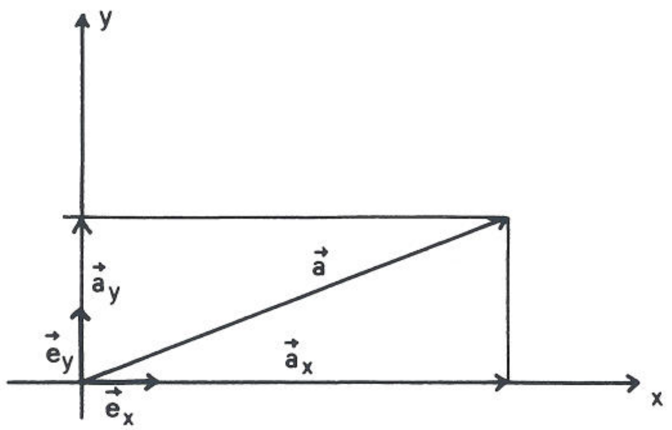
b) Das dreidimensionale Koordinatensystem

x-Achse und y-Achse werden so angeordnet, wie unter a) beschrieben. Die z-Achse ist senkrecht zur x-y-Ebene und zwar so, daß nun die y-Achse im Gegenuhrzeigersinn auf kürzestem Wege in die z-Achse gedreht werden kann



Das so festgelegte Koordinatensystem heißt ein Rechtssystem. Spreizt man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand rechtwinklig zueinander, so entsprechen sie in dieser Reihenfolge der x-, y- und z-Achse eines Rechtssystems. (Rechte-Hand-Regel). In diesem Heft wird stets ein Rechtssystem benutzt.

Im zweidimensionalen Koordinatensystem wird ein Vektor $\vec{a}$ in Richtung der x-Achse bzw. in Richtung der y-Achse so zerlegt, wie in 2.4.2 beschrieben. Man projiziert den Vektor auf die x-Achse bzw. auf die y-Achse, d.h. man zeichnet durch die Pfeilspitze die Parallele zur y-Achse und erhält die Komponente $\vec{a}_x$ auf der x-Achse und man zeichnet ebenso die Parallele zur x-Achse und erhält die Komponente $\vec{a}_y$ auf der y-Achse.



Es gilt nun $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$

Mittels der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ in x-Richtung und $\vec{e}_y$ in y-Richtung kann man nun schreiben

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$$

a_x und a_y heißen die Koordinaten des Vektors $\vec{a}$.
Zur Abkürzung wird folgende Schreibweise vereinbart:

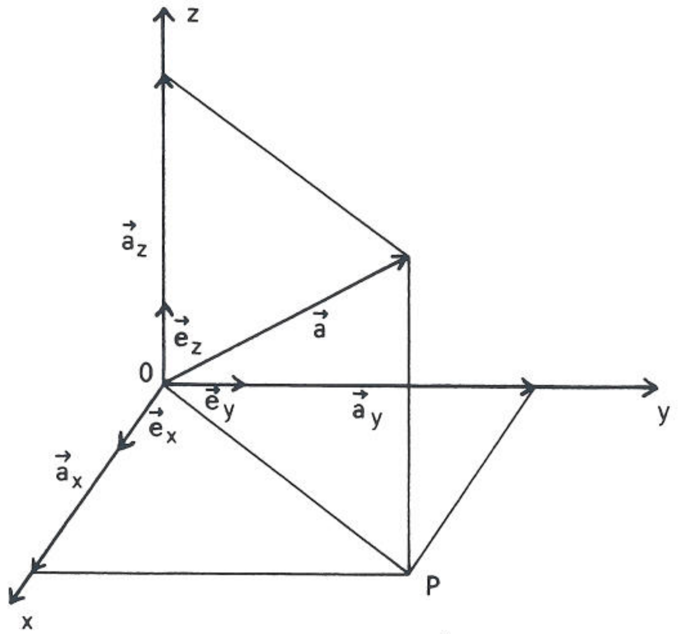
$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y = \binom{a_x}{a_y}$$

Diese Darstellung ist die sogenannte Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{a}$.

Genauso eindeutig wie im zweidimensionalen Fall läßt sich im Raum ein Vektor $\vec{a}$ in Richtung der x-, y- und z-Achse zerlegen. Dazu wird der Vektor zunächst in die x-y-Ebene projiziert, d.h. man zeichnet durch den Endpunkt $\vec{a}$ die Parallele zur z-Achse. Diese trifft die x-y-Ebene in P. Der Vektor $\overrightarrow{OP}$ wird nun, wie bereits erklärt, in x- und in y-Richtung zerlegt.

e Koordinaten-
darstellung

$\vec{a} = \binom{ax}{ay}$



$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Auf diese Weise erhält man $\vec{a}_x$ in x-Richtung und $\vec{a}_y$ in y-Richtung. Die Parallele zu $\overrightarrow{OP}$ trifft die z-Achse und legt die Komponente $\vec{a}_z$ in z-Richtung fest. Für den Vektor $\vec{a}$ gilt nun:

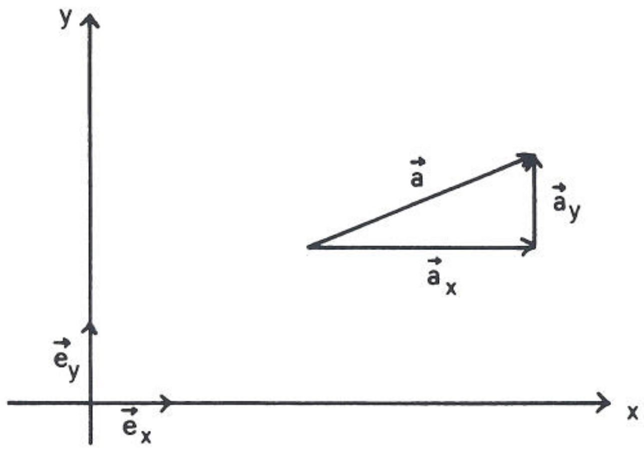
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Die Einheitsvektoren in x-, y- und z-Richtung nennt man $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.
Analog zum zweidimensionalen Beispiel schreibt man jetzt
$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z$
In der "Spalten"-Schreibweise

$$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

erhält man nun die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{a}$.

Bisher wurde davon ausgegangen, daß der Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ im Ursprung 0 des Koordinatensystems liegt. Dies geschah nur aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit. Durch seine Koordinaten ist aber jeder freie Vektor $\vec{a}$, der seinen Anfangspunkt in irgend einem beliebigen Raumpunkt P hat, eindeutig festgelegt. Im zweidimensionalen Bild soll dies veranschaulicht werden.



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y = \binom{a_x}{a_y}$$

Aus der Koordinatendarstellung läßt sich mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht der Betrag eines Vektors berechnen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Ebenso können die bisher erklärten Vektoroperationen in der Koordinatendarstellung leicht und übersichtlich durchgeführt werden.

Gleichheit von Vektoren: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind dann und nur dann gleich, wenn die entsprechenden Koordinaten gleich sind.

Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

dann folgt aus $\vec{a} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

und
$$a_x = b_x$$
$$a_y = b_y$$
$$a_z = b_z$$

Einer Vektorgleichung entsprechen also drei skalare Gleichungen.

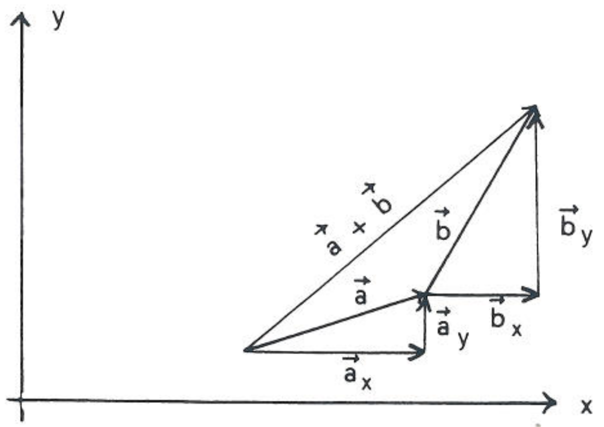
Für die Addition bzw. Subtraktion gilt:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \pm (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z)$$

$$= (a_x \pm b_x)\vec{e}_x + (a_y \pm b_y)\vec{e}_y + (a_z \pm b_z)\vec{e}_z$$

oder kurz $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$

Die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der x-y-Ebene ist im folgenden Bild veranschaulicht.



$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{b}_x) + (\vec{a}_y + \vec{b}_y) = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Für die S-Multiplikation gilt

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Dieser Sachverhalt kann, wie die Addition, für den zweidimensionalen Fall ebenso leicht veranschaulicht werden.

Die Beweise für Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze lassen sich nun leicht auf die bekannten Rechengesetze für Zahlen zurückführen.
Dies sei hier nur an einem Beispiel erläutert.

$$m\,n\,\vec{a} = m(n\,\vec{a}) = n(m\,\vec{a}) = (m\,n)\vec{a}$$

$$m\,n \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} n\,a_x \\ n\,a_y \\ n\,a_z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} m\,a_x \\ m\,a_y \\ m\,a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\,n\,a_x \\ m\,n\,a_y \\ m\,n\,a_z \end{pmatrix}$$

2.4.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Zwei Vektoren, die parallel sind, heißen kollinear. Sie können dann so verschoben werden, daß sie auf ein und dieselbe Gerade fallen. Für zwei kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt die lineare Beziehung $\vec{a} = m\vec{b} \quad m \in \mathbb{R}$ [1)]

kollineare Vektoren
e Kollinearität

Aus

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mb_x \\ mb_y \\ mb_z \end{pmatrix}$$

folgen die Gleichungen

$$a_x = mb_x$$
$$a_y = mb_y$$
$$a_z = mb_z$$

die alle drei für dieselbe Zahl m erfüllt sein müssen.

Wenn drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des Raumes so verschoben werden können, daß sie in ein und dieselbe Ebene fallen, heißen sie komplanar. Jeder der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ kann dann eindeutig in die Richtungen der beiden übrigen Vektoren zerlegt werden[2)]. Es gilt dann zum Beispiel

komplanare Vektoren
e Komplanarität

$$\vec{a} = m\,\vec{b} + n\,\vec{c} \qquad m, n \in R$$

Hieraus erhält man die folgenden drei skalaren Gleichungen

$$a_x = m\,b_x + n\,c_x$$
$$a_y = m\,b_y + n\,c_y$$
$$a_z = m\,b_z + n\,c_z$$

die alle drei durch dieselben Zahlen m und n erfüllt sein müssen. Aus zwei dieser Gleichungen bestimmt man m und n. Die erhaltenen Lösungen müssen auch die dritte Gleichung erfüllen.

1 In dieser Darstellung darf $\vec{b}$ nicht Nullvektor sein. Ist $\vec{a}$ Nullvektor, so ist m = 0. Vereinbarungsgemäß ist der Nullvektor zu jedem Vektor kollinear.

2 Es wird vorausgesetzt, daß nicht 2 oder alle 3 Vektoren kollinear sind. Die Beziehung, die auch diese Sonderfälle beschreibt, ist auf S. 25 unten bzw. S. 26 oben angegeben.

Beispiel: Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ansatz $\vec{a} = m\,\vec{b} + n\,\vec{c}$

das heißt
$$1 = m + 2n$$
$$7 = 2m - n$$
$$-9 = -2m + 3n$$

Aus den beiden ersten Gleichungen findet man für $m = 3$ und für $n = -1$. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind nun komplanar, wenn diese Zahlen auch die dritte Gleichung erfüllen. Dies ist wirklich der Fall, sodaß gilt

$$\vec{a} = 3\,\vec{b} - \vec{c}$$

Da die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jedoch gleichberechtigt sind, können auch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils in Richtung der beiden übrigen Vektoren zerlegt werden. So sind auch die beiden anderen Gleichungen

$$\vec{b} = m_1\vec{a} + n_1\vec{c} \quad \text{bzw.} \quad \vec{c} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b}$$

möglich. (Vgl. Aufgabe A 12)

Die Kollinearität bzw. die Komplanarität von Vektoren sind Sonderfälle der linearen Abhängigkeit von Vektoren. Zwei Vektoren, die kollinear sind, heißen auch linear abhängig. Ebenso nennt man drei Vektoren, die komplanar sind, linear abhängig. Allgemein nennt man $m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $m\,\vec{a} + n\,\vec{b} + p\,\vec{c}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Dabei dürfen m, n und p nicht alle gleichzeitig Null sein.

Die Kollinearitätsbedingung für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$$\vec{a} = m\,\vec{b}$$
wird häufig in der Form
$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} = \vec{0}$$
geschrieben, wobei $m_1 \neq 0 \vee n_1 \neq 0$. Ebenso kann auch die

Komplanaritätsbedingung für die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in der Form

$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} + p_1\vec{c} = \vec{0}$$

geschrieben werden, wobei $m_1 \neq 0 \vee n_1 \neq 0 \vee p_1 \neq 0$.
Man braucht diese Gleichungen nur durch eine der Variablen (m_1, n_1, p_1) zu dividieren, um eine der vorherigen Gleichungen zu erhalten.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch vermerkt, daß die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar sind wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad \text{den Wert Null hat.}$$

Herleitung und Beweis erfolgen später (siehe Spatprodukt).

2.4.6 AUFGABEN

A. 12

Zeigen Sie, daß für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gilt $\vec{b} = m_1\vec{a} + n_1\vec{c}$ *bzw.* $\vec{c} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b}$, *indem Sie* m_1, n_1 *und* m_2, n_2 *berechnen.*

A. 13

Gegeben ist $\vec{a} = 3\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y - 5\,\vec{e}_z$ *und*
$\vec{b} = 2\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y + \vec{e}_z$
Berechnen Sie $2\,\vec{a} + 4\,\vec{b}$ *und* $3\,\vec{a} - 2\,\vec{b}$.

A. 14

Die drei Punkte $P_1\ (1/\ -3/\ 5)$, $P_2\ (-1/\ 5/3)$, $P_3\ (2/\ -2/1)$ *bilden ein Dreieck.*

a) Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ *und* $\overrightarrow{P_1P_3}$ *mit Hilfe der Ortsvektoren* $\vec{r}_1 = \vec{OP}_1$, $\vec{r}_2 = \vec{OP}_2$ *und* $\vec{r}_3 = \vec{OP}_3$ *aus.*

b) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt der Seite $\overline{P_1P_2}$?

c) Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt des Dreiecks?

A. 15

Die beiden Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} N$ und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} N$

haben einen gemeinsamen Angriffspunkt. Welchen Betrag F hat die Resultierende $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ der beiden Kräfte?

A. 16

a) Welche der Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

sind kollinear?

b) Welche der Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

sind komplanar?

A. 17

a) Wie muß man x und z wählen, damit die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$ kollinear sind?

b) Wie muß man y wählen, damit die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -9 \end{pmatrix}$ komplanar sind?

A. 18

Zeigen Sie, daß sich die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} N$ in die Richtungen von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ zerlegen läßt. Geben Sie die Komponenten $\vec{F}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{F}_b$ in Richtung von $\vec{b}$ an.

2.5 Das skalare Produkt zweier Vektoren

Definition: Unter dem skalaren Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man das Produkt aus den Beträgen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

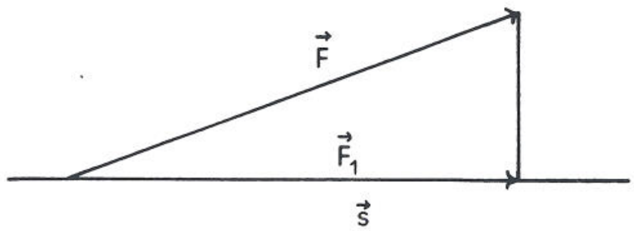
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

s Skalarprodukt
skalares Produkt

Das Ergebnis des Produktes $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (gelesen "a Punkt b") ist also eine reelle Zahl und kein Vektor. Daher auch die Bezeichnung Skalarprodukt. Der Winkel, den zwei Vektoren einschließen, liegt zwischen 0^o und 180^o. Wenn $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) > 90^o$ ist, so ist $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Eine wichtige Anwendung des Skalarproduktes in der Physik stellt die Berechnung der Arbeit dar. Die Arbeit, die eine konstante Kraft $\vec{F}$ längs eines geradlinigen Wegstückes $\vec{s}$ verrichtet, ist

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \sphericalangle (\vec{F}, \vec{s}) = F_1 \cdot s$$

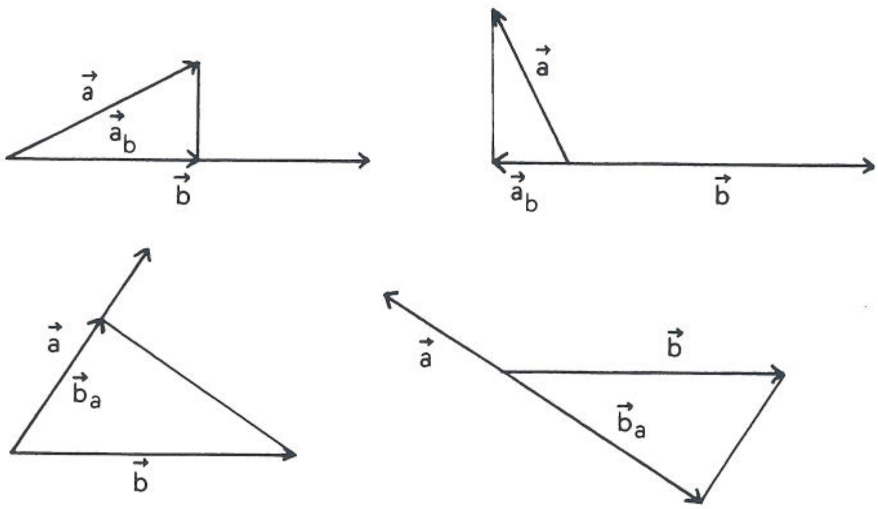


Dabei ist $\vec{F}_1$ die Projketion des Vektors $\vec{F}$ in die Richtung von $\vec{s}$. Oder anders ausgedrückt: $\vec{F}_1$ ist die Komponente der Kraft $\vec{F}$ in Richtung des Weges.

Aus den folgenden Zeichnungen läßt sich für das Skalarprodukt auch der folgende Zusammenhang ablesen:

Ist $\vec{a}_b$ die Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ bzw. $\vec{b}_a$ die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$, so gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$$



Denn nach der Definition ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$.
Nun ist aber $|\vec{a}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \pm|\vec{a}_b|$ je nachdem, ob $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ kleiner oder größer als 90^0 ist.
$\vec{a}_b \cdot \vec{b}$ ist aber $\vec{a}_b \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}_b||\vec{b}|$
Und zwar gilt das Pluszeichen, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) < 90^0$ ist.
$\vec{b}$ und $\vec{a}_b$ haben dann gleiche Orientierung und es ist $\sphericalangle(\vec{a}_b\ \vec{b}) = 0$ d.h. $\cos \sphericalangle(\vec{a}_b\ \vec{b}) = +1$.
Das Minuszeichen gilt, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) > 90^0$ ist. Dann haben $\vec{a}_b$ und $\vec{b}$ entgegengesetzte Orientierung und es ist $\sphericalangle(\vec{a}_b, \vec{b}) = 180^0$ d.h. $\cos \sphericalangle(\vec{a}_b, \vec{b}) = -1$. Daraus folgt also $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_b \cdot \vec{b}$. In entsprechender Weise kann man zeigen, daß

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a \qquad \text{gilt.}$$

Aus der Definition des Skalarproduktes ergeben sich wesentliche Unterschiede zur Zahlenalgebra.

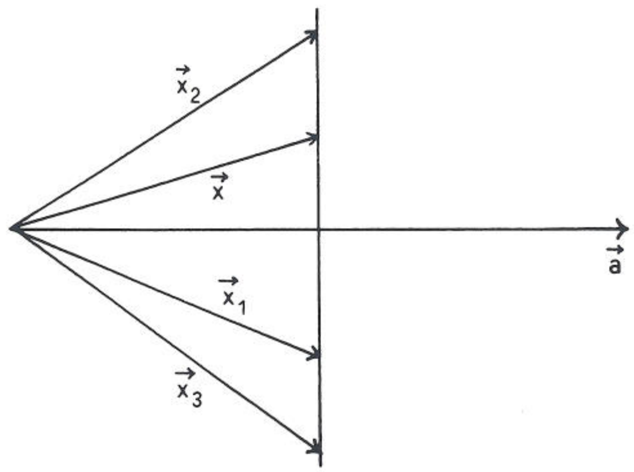
1) Das Produkt ganzer Zahlen zum Beispiel ist wieder eine ganze Zahl. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist aber kein Vektor (!) sondern eine Zahl.

2) Das Produkt zweier Zahlen ist dann und nur dann 0, wenn eine der beiden Zahlen 0 ist. Das Skalarprodukt ist ebenso 0, wenn einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist. Es ist aber auch dann 0, wenn die beiden Vektoren senkrecht zueinander sind ($\cos 90^0 = 0$).

3) Das Assoziativgesetz ist nicht erfüllt. $(\vec{a}\ \vec{b})\ \vec{c}$ ist ein Vektor in Richtung von $\vec{c}$. $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ist dagegen ein Vektor

in Richtung von $\vec{a}$. Also ist im allgemeinen
$(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})$.

4) Es gibt keine Umkehrung (Division) zur Produktbildung. Aus $\vec{a}\,\vec{x} = b$ kann $\vec{x}$ nicht eindeutig bestimmt werden, wenn $\vec{a}$ und b bekannt sind. Aus der Zeichnung ersieht man, daß es beliebig viele Vektoren $\vec{x}_i$ gibt, für die gilt $\vec{a}\,\vec{x} = \vec{a}\,\vec{x}_1 = \vec{a}\,\vec{x}_2 \ldots = b$



5) Für das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{a}$ schreibt man kurz $\vec{a}^{\,2}$. Diese Schreibweise bedeutet eine Abkürzung, jedoch nicht die Definition einer Potenz. Im übrigen sei darauf hingewiesen, daß $\vec{a}^{\,3}$, $\vec{a}^{\,4}$ usw. keinen Sinn haben, da das Skalarprodukt nur für zwei Faktoren definiert ist.

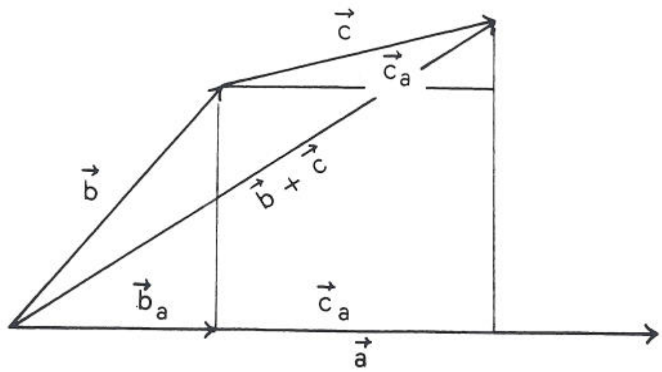
Das Kommutativgesetz ist für die skalare Multiplikation jedoch erfüllt. Dies erkennt man leicht aus der Definition für das Skalarprodukt:

$a \cdot b = b \cdot a$

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Auch das Distributivgesetz ist gültig . Die Gültigkeit dieses Gesetzes soll hier jedoch nur für den Sonderfall bewiesen werden, daß die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in einer Ebene (z.B. in der Zeichenebene) liegen.

$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$



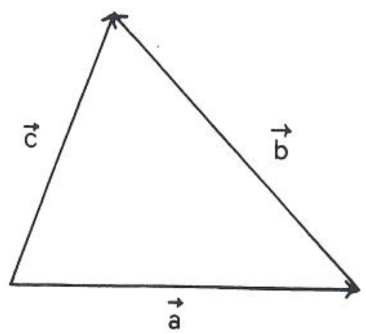
Aus der Zeichnung liest man ab: $(\vec{b} + \vec{c})_a = \vec{b}_a + \vec{c}_a$
Also kann man schreiben:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} + \vec{c})_a = \vec{a}\,\vec{b}_a + \vec{a}\,\vec{c}_a = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Der Beweis für den Fall, daß $\vec{c}$ nicht in der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, liegt, wirft etwas größere Probleme mit dem räumlichen Anschauungsvermögen auf. Deshalb wird hier auf den allgemeinen Beweis verzichtet.

Bei einem Produkt zweier Summen oder Differenzen ist das Distributivgesetz wiederholt anzuwenden.
Beispiel: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} - \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c} - \vec{b}\,\vec{d}$

Als weiteres Anwendungsbeispiel kann nun mit Hilfe der Vektorrechnung der Kosinussatz der ebenen Geometrie bewiesen werden.



Im nebenstehenden Dreieck liest man ab:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

oder $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

nun ist

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{b}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{b}\vec{c}$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc \cos \sphericalangle(\vec{b}\vec{c})$$

Dies ist der Kosinussatz.

Mit Hilfe des Distributivgesetzes kann nun die skalare

Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Koordinatendarstellung ausgeführt werden.

Es ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z)$$

$$= a_xb_x\vec{e}_x\vec{e}_x + a_xb_y\vec{e}_x\vec{e}_y + a_xb_z\vec{e}_x\vec{e}_z$$

$$+ a_yb_x\vec{e}_y\vec{e}_x + a_yb_y\vec{e}_y\vec{e}_y + a_yb_z\vec{e}_y\vec{e}_z$$

$$+ a_zb_x\vec{e}_z\vec{e}_x + a_zb_y\vec{e}_z\vec{e}_y + a_zb_z\vec{e}_z\vec{e}_z$$

Vorausgesetzt und benutzt wurde das Kommutativgesetz für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:
zum Beispiel $a_x\vec{e}_xb_x\vec{e}_x = a_xb_x\vec{e}_x\vec{e}_x$

Da die Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ paarweise senkrecht zueinander stehen, gilt

$$\vec{e}_x\vec{e}_x = \vec{e}_y\vec{e}_y = \vec{e}_z\vec{e}_z = 1$$

und $$\vec{e}_x\vec{e}_y = \vec{e}_x\vec{e}_z = \vec{e}_y\vec{e}_z = \vec{e}_y\vec{e}_x = \vec{e}_z\vec{e}_x = \vec{e}_z\vec{e}_y = 0$$

Für das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ erhält man somit

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Beispiel: Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

ist also $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 8 + 5 = 3$$

Das Skalarprodukt ermöglicht es auf einfache Weise den Betrag eines Vektors und den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu berechnen.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

Das Skalarprodukt in Koordinatendarstellung

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ist $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

also $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Diese Formel war schon mit Hilfe geometrischer Überlegungen (pythagoräischer Lehrsatz) hergeleitet worden.

Die Definitionsgleichung für das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

wird nach $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ aufgelöst. Dann ergibt sich

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Auf diese Weise kann der $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ eindeutig berechnet werden.

Beispiele:

1. Es war $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z$ und $\vec{b} = 2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - \vec{e}_z$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

   Mit $|\vec{a}| = \sqrt{38}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{21}$ ist

   $$\sphericalangle\cos\ (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{21}} = 0{,}1062$$

   Der Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ ist also $83{,}9^{\circ}$.

2. Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 + 6 - 20 = -17$

   und $|\vec{a}| = \sqrt{38}$ sowie $|\vec{b}| = \sqrt{26}$

   Damit ist $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{17}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}5408$

   und der Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 122{,}7^{\circ}$.

2.5.1 Aufgaben

A. 19

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie a) $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$

b) $\vec{a}^{\,o}$ und $\vec{b}^{\,o}$

c) den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

A. 20

a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen.

b) Wie muß man y wählen, damit die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zueinander stehen?

A. 21

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

b) Berechnen Sie $\vec{a}\,\vec{e}_x$ und $\vec{b}\,\vec{e}_y$

c) Welchen Winkel schließt $\vec{a}$ mit der x-Achse und $\vec{b}$ mit der y-Achse ein?

A. 22

Wie muß man y und z wählen, damit der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ senkrecht zu der Ebene ist, die durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird?

A. 23

a) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Zeigen Sie,

daß gilt $\vec{b}_a = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\,\vec{a}$ und $\vec{a}_b = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\,\vec{b}$

b) Berechnen Sie $\vec{b}_a$ und $\vec{a}_b$ wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.6 Das vektorielle Produkt zweier Vektoren

s Vektorprodukt
vektorielles Produkt

Neben dem Skalarprodukt wird noch ein weiteres Produkt zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert: Das Vektorprodukt oder das vektorielle Produkt. Das Ergebnis dieser Vektoroperation ist wieder ein Vektor. Daher der Name Vektorprodukt. Bei der Definition dieser Operation müssen also Betrag, Richtung und Orientierung eines Vektors festgelegt werden.

Definition:

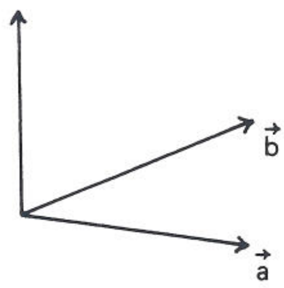
1. Für den Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ (gelesen "a kreuz b") wird definiert
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\ |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|$

2. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$, das heißt senkrecht zu der Ebene, die durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Für die Orientierung gibt es nun zwei Möglichkeiten. Deshalb wird weiter festgelegt:

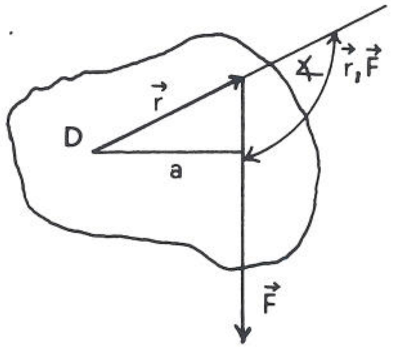
3. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



Veranschaulichung der Festlegung 3: Hält man den Daumen der rechten Hand in Richtung und Orientierung von $\vec{a}$ und den Zeigefinger in Richtung und Orientierung von $\vec{b}$, dann gibt der Mittelfinger senkrecht dazu Richtung und Orientierung von $\vec{a} \times \vec{b}$ an. (Dreifingerregel der rechten Hand)

Eine andere Veranschaulichung ist für den Sonderfall, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander sind, möglich: Legt man $\vec{a}$ in die x-Achse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems (Rechtssystem) und $\vec{b}$ in die y-Achse dieses Systems, so liegt $\vec{a} \times \vec{b}$ in der z-Achse dieses Systems.
Ein wichtiges Beispiel für die Anwendung des Vektorproduktes in der Physik ist das Drehmoment.



Es ist: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Dabei ist dann

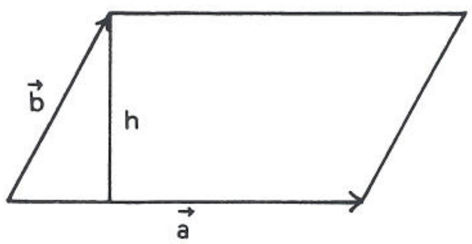
$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}|\;|\sin \measuredangle(\vec{r},\vec{F})| = a \cdot F$$

$$a = |\vec{r}|\;|\sin \measuredangle(\vec{r},\vec{F})|$$

$\vec{M}$ ist ein Vektor, der in der Drehachse liegt. Die Orientierung von $\vec{M}$ ist so festgelegt, daß bei einer Drehung des Körpers im Uhrzeigersinn (vgl. Bild) der Vektor $\vec{M}$ vom Betrachter aus in die Bildebene zeigt.

Aus der Definition lassen sich wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes ableiten:

1. Der Betrag des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich der Maßzahl der Parallelogrammfläche, die durch die beiden Vektoren aufgespannt wird.



mit $h = b\;|\sin \measuredangle(\vec{a},\vec{b})|$ ist

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin \measuredangle(\vec{a},\vec{b})| = a \cdot h$$

2. Das Vektorprodukt hat den Betrag 0, wenn einer der beiden Vektoren Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren parallel sind. (Der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms ist ja dann gleich 0).

3. Das Kommutativgesetz gilt nicht für das Vektorprodukt. Die beiden Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$ sind nämlich Gegenvektoren, wie sich mit Hilfe der Dreifingerregel leicht nachweisen läßt.
   Es gilt also $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$, aber es ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

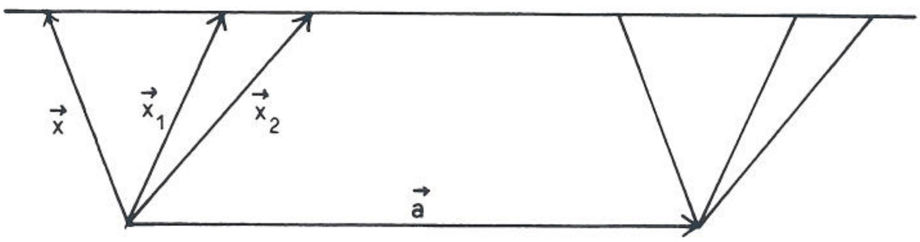
$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

4. Auch das assoziative Gesetz gilt bei der vektoriellen Multiplikation nicht. Dies läßt sich mit Hilfe eines Sonderfalles leicht zeigen. Von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ soll der Vektor $\vec{c}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ sein. Dann ist das Vektorprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$, also der Nullvektor, weil die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$ parallel sind. $\vec{b} \times \vec{c}$ ist ein Vektor, der senkrecht zu $\vec{c}$ ist. Er liegt also in der Ebene von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ist dann wieder ein Vektor senkrecht zu der Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (bzw. $\vec{b}$ und $\vec{c}$) aufgespannt wird. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ist daher parallel zu $\vec{c}$. Deshalb folgt, falls $\vec{a}$ nicht senkrecht zu $\vec{b}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

5. Es gibt auch, wie schon bein Skalarprodukt, keine Umkehrung (Division) für das Vektorprodukt. Aus der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ kann $\vec{x}$ nicht eindeutig bestimmt werden, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bekannt sind. Aus der folgenden Figur läßt sich ablesen



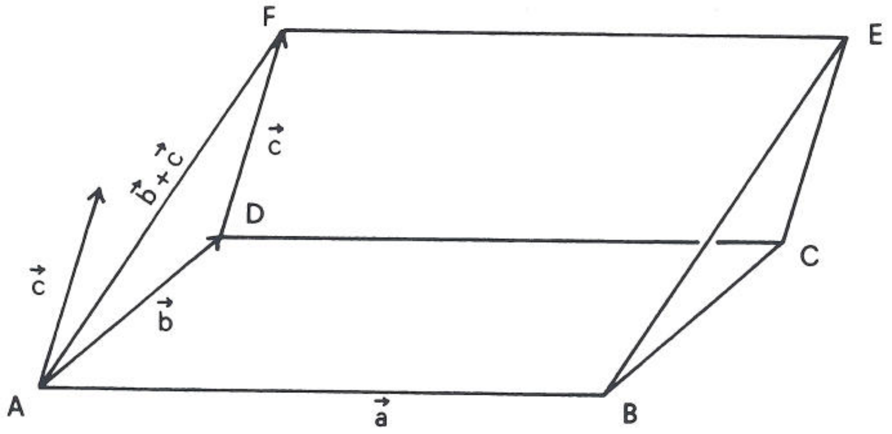
$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}_1 = \vec{a} \times \vec{x}_2 = \vec{b}$$

Die Vektorprodukte $\vec{a} \times \vec{x}$, $\vec{a} \times \vec{x}_1$ und $\vec{a} \times \vec{x}_2$ haben alle den gleichen Betrag - flächengleiche Parallelogramme -, die gleiche Richtung und Orientierung. Es gibt also beliebig viele Vektoren $\vec{x}_i$, für die gilt: $\vec{a} \times \vec{x}_i = \vec{b}$. Daher kann man aus der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ den Vektor $\vec{x}$ nicht eindeutig bestimmen.

6. Für die vektorielle Multiplikation gilt das Distributivgesetz

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Die Gültigkeit dieses Gesetzes wird auch nur für den Sonderfall nachgewiesen, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in einer Ebene (zum Beispiel in der Zeichenebene) liegen.



Aus der obenstehenden Figur läßt sich für die Flächeninhalte der Parallelogramme ablesen:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = F_{ABCD} \quad , \quad |\vec{a} \times \vec{c}| = F_{DCEF}$$

und $$|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = F_{ABEF}$$

Nun gilt aber für die Flächeninhalte der Parallelogramme:

$$F_{ABCD} + F_{DCEF} = F_{ABEF}$$

d.h. $$|\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})|$$

Darüber hinaus gilt für die obige Anordnung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}|$$

weil nämlich die Vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{c}$ senkrecht zur Zeichenebene liegen, das heißt weil $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{c}$ gleiche Richtung und Orientierung haben. Also folgt

$$|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}|$$

Weil nun aber $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{c}$ alle gleiche Richtung und Orientierung haben, gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

w.z.b.w.

7. Weiterhin gilt das Gesetz

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\,\vec{b})$$

Der Beweis hierfür kann leicht geführt werden, denn man sieht zunächst leicht ein, daß die drei Vektoren $m(\vec{a} \times \vec{b})$, $(m\,\vec{a}) \times \vec{b}$ und $\vec{a} \times (m\,\vec{b})$ gleiche Richtung und Orientierung haben. Darüber hinaus sind auch noch die folgenden Beträge gleich:

$$|m|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\sphericalangle(\vec{a}\,\vec{b})| = |m\,\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\sphericalangle(\vec{a}\,\vec{b})| =$$
$$|\vec{a}|\,|m\,\vec{b}|\,|\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = |m\,(\vec{a} \times \vec{b})|$$

Also gilt $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\,\vec{b})$

Der Beweis dieses Gesetzes vor allem aber der Nachweis, daß das Distributivgesetz allgemeingültig ist, kann später (Aufgabe!) mit Hilfe der Koordinatendarstellung des Vektorproduktes leicht durchgeführt werden.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

Das Vektorprodukt in Koordinatendarstellung

Mit Hilfe dieser Gesetze können jetzt aus den Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Koordinaten des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ berechnet werden.

Zur Vorbereitung ist es zweckmäßig, zunächst die Vektorprodukte zwischen den Einheitsvektoren zu berechnen. Es ist

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

Die Produkte zweier verschiedener Einheitsvektoren ergeben einen Einheitsvektor, weil der Betrag der Einheitsvektoren 1 aber auch der Sinus des eingeschlossenen Winkels gleich $\pm$ 1 ist. Mit Hilfe der Dreifingerregel kann man Richtung und Orientierung bestimmen.

Es gilt zum Beispiel für:

$$|\vec{e}_x \times \vec{e}_y| = |\vec{e}_x|\,|\vec{e}_y| \sin\sphericalangle(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = 1 \cdot 1 \sin 90^0 = 1$$

Jetzt müssen noch Richtung und Orientierung von $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ ermittelt werden. Man findet so $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Für die übrigen Produkte ergibt sich

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

Berücksichtigt man noch, daß - wie leicht einzusehen - gilt $(m\,\vec{a}) \times (n\,\vec{b}) = m\,n\,(\vec{a} \times \vec{b})$ so erhält man durch Anwendung des distributiven Gesetzes für $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \times (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) \\
&= a_xb_x(\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + a_xb_y(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_xb_z(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \\
&+ a_yb_x(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_yb_y(\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + a_yb_z(\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\
&+ a_zb_x(\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_zb_y(\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + a_zb_z(\vec{e}_z \times \vec{e}_z) \\
&= a_xb_y\vec{e}_z - a_xb_z\vec{e}_y - a_yb_x\vec{e}_z + a_yb_z\vec{e}_x + a_zb_x\vec{e}_y - a_zb_y\vec{e}_x \\
&= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{e}_x - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe einer Determinante viel kürzer und einprägsamer schreiben. Es ist dann

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

Determinanten werden an dieser Stelle vorausgesetzt. Definition und Berechnung der Determinanten siehe 4 ff.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Es ist $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \vec{e}_x \\ 2 & -4 & \vec{e}_y \\ -5 & -1 & \vec{e}_z \end{vmatrix}$

$$= -22\,\vec{e}_x - 7\,\vec{e}_y - 16\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} -22 \\ -7 \\ -16 \end{pmatrix}$$

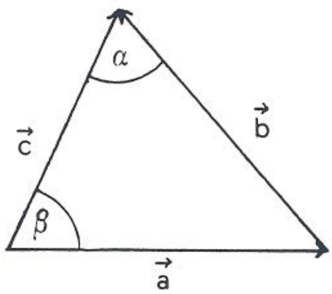
Mit Hilfe der Determinantenschreibweise für das Vektorprodukt kann nun leicht der Beweis für die Gültigkeit des

Distributivgesetzes geführt werden. Es ist:

$$\vec{a} \times (\vec{b}+\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x+c_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y+c_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z+c_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & c_x & \vec{e}_x \\ a_y & c_y & \vec{e}_y \\ a_z & c_z & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

also: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ w.z.b.w.

Abschließend sei noch ein Beispiel zur Anwendung des Distributivgesetzes angeführt.



Für das nebenstehende Dreieck gilt:

$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Multipliziert man diese Gleichung vektoriell "von rechts" mit $\vec{c}$, so ergibt sich

$$(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \times \vec{c} = \vec{0} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$$

wegen $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$, folgt

$$\vec{a} \times \vec{c} = - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{b}$$

sicher sind jetzt auch die Beträge gleich

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{b}|$$

$$|\vec{a}|\,|\vec{c}|\,|\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})| = |\vec{c}|\,|\vec{b}|\,|\sin \sphericalangle(\vec{c}, \vec{b})|$$

$$a\ c\ \sin \beta = c\ b\ \sin \alpha$$

oder $\quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta$

Dies ist der Sinussatz der ebenen Trigonometrie.

Anmerkung: Da das kommutative Gesetz für die vektorielle Multiplikation nicht gilt, ist es wichtig, auf die Reihenfolge der Faktoren zu achten. Deswegen sagt man in $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$ wurde die Summe von rechts mit $\vec{c}$ multipliziert und in $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ wurde die Summe von links mit $\vec{c}$ multipliziert. Das Verfahren, in dem eine Vektorgleichung mit

vektorielle Multiplikation "von rechts" bzw. "von links" einem Vektor multipliziert wird, nennt man operatives Verfahren.

2.6.1 AUFGABEN

A. 24

Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie einen Vektor an, der zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ senkrecht ist. Machen Sie die Probe für die Richtigkeit Ihrer Rechnung.

A. 25

Die drei Punkte P_1 (4/ -2/ 2), P_2 (5/ -1/5) und P_3 (6/ -2/ 4) bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

A. 26

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $(4\vec{a} + 3\vec{b}) \times (2\vec{a} - 4\vec{b})$ auf zwei Arten, indem Sie a) die Koordinaten einsetzen und dann die Multiplikation ausführen und indem Sie b) zuerst die Multiplikation ausführen und dann die Koordinaten einsetzen.

A. 27

Beweisen Sie mit Hilfe von Determinanten das "gemischt assoziative Gesetz"

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\,\vec{b}).$$

A. 28

Berechnen Sie a) $(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \times \vec{e}_x$

b) $(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \times (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$

c) $(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \times (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$

A. 29

Es sei $\vec{a} = 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_z$

Berechnen Sie a) $\vec{a} \times \vec{e}_x$

b) $\vec{a} \times \vec{e}_y$

c) $\vec{a} \times \vec{e}_z$

Geben Sie die Lage des jeweiligen Ergebnisvektors in bezug auf die Koordinatenebenen an.

A. 30

Zeigen Sie durch eine einfache Überlegung (möglichst nicht durch Rechnung), daß $\vec{a}\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ und $\vec{b}\cdot(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ist.

2.7 Das Spatprodukt

In Aufgabe A. 30 tritt eine "Kombination" der beiden bisher definierten Produkte auf. Dabei erhebt sich die Frage, ob derartige Produkte sinnvoll definiert werden können. Es ist zum Beispiel leicht einzusehen, daß das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b}\cdot\vec{c})$ keinen Sinn hat, denn $\vec{b}\cdot\vec{c}$ ist ein Skalar und ein Vektorprodukt von einem Vektor mit einem Skalar kann nicht definiert werden. Ebenso wie die wiederholte Multiplikation $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ nicht möglich ist, weil die Assoziativgesetze für das Skalarprodukt wie auch für das Vektorprodukt nicht gelten, so hat auch eine "kombinierte Anwendung" der beiden Produkte ohne Setzen von Klammern keinen Sinn. $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ ist nicht definiert. Während $\vec{a} \times (\vec{b}\cdot\vec{c})$ - wie erwähnt - keinen Sinn hat, ist jedoch das Produkt $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c}$ sinnvoll. Es handelt sich hierbei um das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ mit dem Vektor $\vec{c}$.

Man nennt das Produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ das Spatprodukt. s Spatprodukt

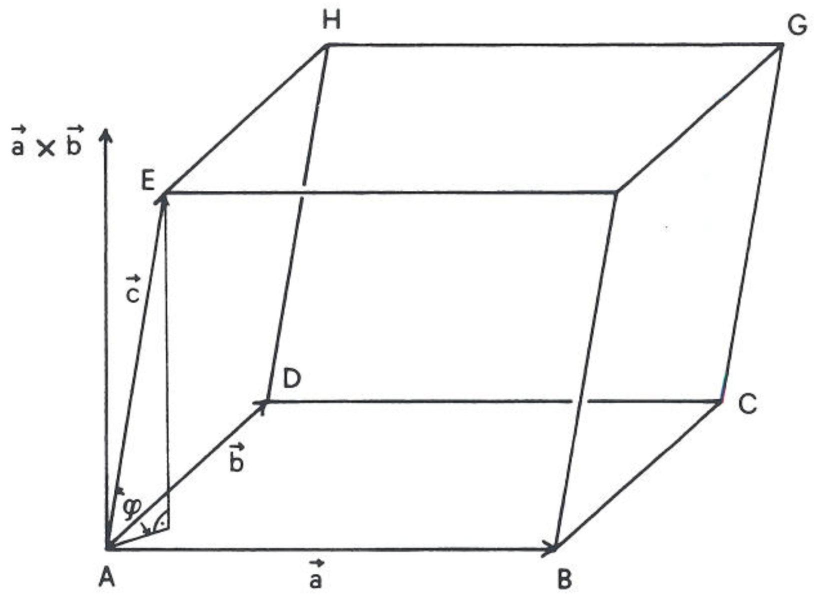
Das Spatprodukt ist eine skalare Größe.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bestimmen, wenn sie nicht komplanar sind, ein Parallelepiped oder einen Spat. Der Betrag des Spatprodukts gibt das Volumen des Spats an.

Das Spatprodukt kann als dreireihige Determinante geschrieben werden, in der die Koordinaten der drei Vektoren je eine Spalte bilden.

Es gilt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

Im Folgenden soll nun bewiesen werden, daß das Spatprodukt durch diese Determinante dargestellt werden kann und daß das Spatprodukt das Volumen des Spats liefert.



Für das Spatprodukt gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\,|\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

Aus der Abbildung ersieht man, daß $|\vec{a} \times \vec{b}|$ der Flächeninhalt der Grundfläche ABCD des Körpers ist. Wegen

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) &= \sin [90^0 - \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})] \\ &= \sin \varphi \end{aligned}$$

ist: $|\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \sin \varphi = h$, wobei h die Höhe des Körpers ist.

Also ist:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}|\,|\vec{c}| \cos \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = F_{ABCD} \cdot h = V$$

das Volumen des Körpers, der durch die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bestimmt ist. Damit ist ein Teil der Behauptung bewiesen.

Nun soll der 2. Teil der Behauptung bewiesen werden:
In der Koordinatenschreibweise läßt sich das Spatprodukt mit Hilfe einer dreireihigen Determinante schreiben.

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

also

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} c_z$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

w.z.b.w.

Das Spatprodukt ist positiv, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Dann ist der Winkel $\measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < 90^0$ und $\cos \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$. Das Spatprodukt gibt dann die Maßzahl des Volumens des Spats an.
Statt der Fläche ABCD kann auch jede andere Seitenfläche als Grundfläche genommen werden. So ist

$|\vec{c} \times \vec{a}| = F_{ABFE}$ und $|\vec{b} \times \vec{c}| = F_{ADHE}$

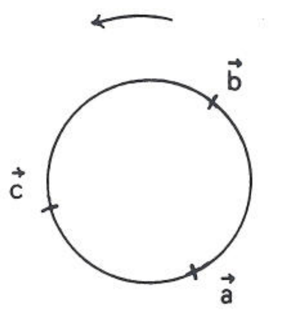
Mit Hilfe räumlich geometrischer Überlegungen findet man
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}$

Die Richtigkeit dieser Beziehung ist aber auch sofort einsichtig, wenn die Determinantenschreibweise benutzt wird. In der Reihenfolge $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bzw. $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ bzw. $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ bilden die Vektoren jeweils ein Rechtssystem. Die Gültigkeit der obigen Gleichung gestattet die Feststellungen:

Im Spatprodukt sind die Vektoren zyklisch vertauschbar.

Oder: Im Spatprodukt sind die skalare Multiplikation und die vektorielle Multiplikation bei gleicher Reihenfolge der Vektoren vertauschbar:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$$



zyklische Vertauschung

Unter zyklischer Vertauschung versteht man folgendes: Man ordnet den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Punkte auf einer Kreisperipherie zu. Wenn man bei irgendeinem Vektor beginnt, so ergibt sich die weitere Reihenfolge durch Ablesen im Gegenuhrzeigersinn. Mit Hilfe der Determinantenschreibweise kann auch ebenso leicht gezeigt werden, daß bei antizyklischer Vertauschung der Vektoren - das heißt bei Ablesung im Uhrzeigersinn - gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -\,(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = -\,(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a} = -\,(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c}$$

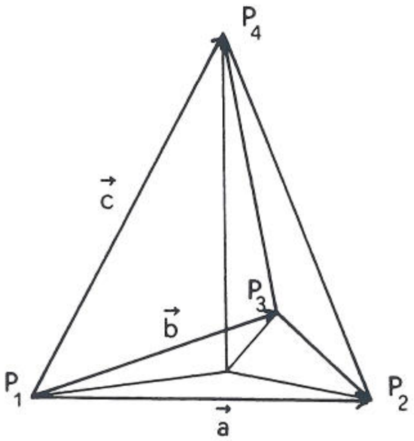
In der Determinante $\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$

müssen dann jeweils zwei parallele Spalten miteinander vertauscht werden.
In der Reihenfolge $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ bzw, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ bilden die Vektoren kein Rechtssystem sondern ein sogenanntes Linkssystem.
Je nachdem, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden, ist der Wert des Spatproduktes $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ positiv oder negativ. Die Maßzahl des Volumens des aufgespannten Spats ist dann aber immer der Betrag des Spatproduktes.

Tetraedervolumen

Man kann zeigen, daß für das Volumen eines Tetraeders, welches durch vier Punkte geht, die nicht alle in einer

Ebene liegen, gebildet wird, gilt:



$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{matrix}\right\|$$

$$= \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{matrix}\right\|$$

wenn x_i, y_i, z_i die Koordinaten von P_i sind und $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{P_1P_4} = \vec{c}$ sind.

Der Fall $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$

Wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar sind, so existiert kein eigentlicher Spat mehr. Die Höhe eines aus drei komplanaren Vektoren gebildeten Spats ist nämlich Null. Infolgedessen ist auch das Spatvolumen Null.
Wenn das Spatprodukt aus den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ den Wert Null hat und keiner der drei Vektoren Nullvektor ist, so kann daraus geschlossen werden, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar sind, das heißt,
wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ist,}$$

sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanar. Die Determinante gibt immer die Maßzahl des Spatvolumens an. Das Spatvolumen kann aber nur Null sein, wenn entweder die Grundfläche oder die Höhe (oder beide) Null ist. Dies bedeutet aber, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in einer Ebene liegen, das heißt komplanar sind. Die Deutung, daß die Grundfläche des Spats den Wert Null hat, ist dann möglich, wenn zwei der drei Vektoren kollinear sind.

Im Folgenden sollen zwei Lehrsätze mit Hilfe des Spatproduktes bewiesen werden. Die Sätze werden auch im Kapitel

Anwendungsbeispiele

über Determinanten bewiesen. (Satz 8 und Cramer'sche Regel). Mit diesen beiden Anwendungsbeispielen soll einerseits die enge Verzahnung zwischen linearer Algebra und Vektorrechnung und andererseits die Eleganz der vektoriellen Beweismethode herausgestellt werden.

Beispiel 1. (Vgl. Sätze über Determinanten)

Wenn die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

den Wert Null hat, dann ist irgendeine Reihe eine Linearkombination paralleler Reihen.

Beweis: Die Determinante D wird als Spatprodukt gedeutet. Aus dem Verschwinden der Determinante D folgt aber, daß die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

komplanar sind. Das heißt, daß zum Beispiel

$$\vec{a} = m\,\vec{b} + n\,\vec{c}$$

gelten muß. Daraus ergeben sich die folgenden drei skalaren Gleichungen

$$a_x = m\,b_x + n\,c_x$$

$$a_y = m\,b_y + n\,c_y$$

$$a_z = m\,b_z + n\,c_z$$

Damit ist gezeigt, daß die erste Spalte eine Linearkombination der beiden anderen Spalten ist. Genauso kann nun aber für die beiden anderen Vektoren bzw. Spalten verfahren werden. Durch Stürzen der Determinante kann dann auch der Satz für Zeilen bewiesen werden. Damit ist die Allgemeingültigkeit des Satzes nachgewiesen.

Beispiel 2. (Cramer'sche Regel)

Die Cramer'sche Regel besagt: Für das Gleichungssystem

$$a_x\, x_1 + b_x\, x_2 + c_x\, x_3 = d_x$$
$$a_y\, x_1 + b_y\, x_2 + c_y\, x_3 = d_y$$
$$a_z\, x_1 + b_z\, x_2 + c_z\, x_3 = d_z$$

ist die Lösung

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_x & b_x & c_x \\ d_y & b_y & c_y \\ d_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_x & d_x & c_x \\ a_y & d_y & c_y \\ a_z & d_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_x & b_x & d_x \\ a_y & b_y & d_y \\ a_z & b_z & d_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}$$

wenn die Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, d.h. $D \neq 0$.

Beweis: Die drei skalaren Gleichungen des Gleichungssystems können in eine Vektorgleichung zusammengefaßt werden:

$$\vec{a}\, x_1 + \vec{b}\, x_2 + \vec{c}\, x_3 = \vec{d}$$

wenn für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

Um aus dieser Gleichung x_1 zu eliminieren, wird die Gleichung skalar mit $\vec{b} \times \vec{c}$ multipliziert. Man erhält dann

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})x_1 + \vec{b}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})x_2 + \vec{c}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})x_3 = \vec{d}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})$$

Nun gilt aber für die Spatprodukte

$$\vec{b}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

Also ist

$$x_1 = \frac{\vec{d}(\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{\begin{vmatrix} d_x & b_x & c_x \\ d_y & b_y & c_y \\ d_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}$$

Analog dazu wird die Gleichung skalar nicht mit $\vec{a} \times \vec{c}$ multipliziert, um x_2 zu erhalten und mit $\vec{a} \times \vec{b}$ multipliziert, um x_3 zu erhalten.
Es ist dann

$$x_2 = \frac{\vec{d}(\vec{a} \times \vec{c})}{\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})} = \frac{- \vec{a}(\vec{d} \times \vec{c})}{- \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{\begin{vmatrix} a_x & d_x & c_x \\ a_y & d_y & c_y \\ a_z & d_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}$$

und

$$x_3 = \frac{\vec{d}(\vec{a} \times \vec{b})}{\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{d})}{\vec{a}\cdot(\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{\begin{vmatrix} a_x & b_x & d_x \\ a_y & b_y & d_y \\ a_z & b_z & d_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}$$

2.7.1 AUFGABEN

A. 31

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

A. 32

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind. Geben Sie falls möglich $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an. Geben Sie gegebenenfalls auch an, ob zwei der Vektoren kollinear sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

A. 33

Bestimmen Sie das Volumen des Spats, welches durch die Vektoren

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

aufgespannt wird.

A. 34

Bestimmen Sie b_z so, daß die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ b_z \end{pmatrix}$$

senkrecht zueinander sind.
Begründen Sie, weshalb die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ einen Quader aufspannen. Berechnen Sie das Volumen des Quaders.

A. 35

Zeigen Sie, daß sowohl im Fall a) als auch im Fall b) die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in einer Ebene liegen. In einem der Fälle liegen sogar drei Punkte auf einer Geraden. In welchem Fall?

a) $P_1(2/-3/1)$, $P_2(4/-15/-3)$, $P_3(-1/2/4)$, $P_4(6/-1/-1)$

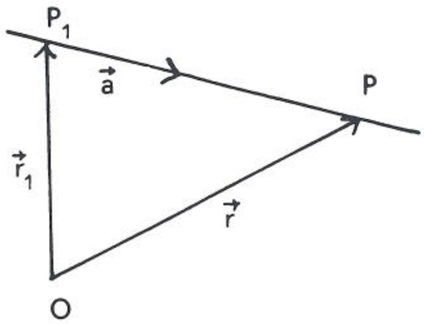
b) $P_1(2/4/7)$, $P_2(5/7/3)$, $P_3(-4/-2/15)$, $P_4(-1/3/2)$

3 Vektorielle analytische Geometrie des Raumes

In den vorangehenden Kapiteln wurden Vektoren und Vektoroperationen definiert und Gesetze hergeleitet und bewiesen. In den folgenden Abschnitten werden einige Anwendungen aus der Geometrie des Raumes besprochen. Dabei handelt es sich um die linearen Gebilde Gerade und Ebene. Ziel dieser Anwendungsbeispiele aus der analytischen Geometrie ist es, Methoden der Vektorrechnung einzuüben und räumliches Anschauungsvermögen zu fördern. Es können durchaus einige Aufgaben der Raumgeometrie an geeigneter Stelle früher behandelt werden. So kann zum Beispiel der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene - wenn diese Gebilde in der sogenannten Parameterform gegeben sind - auch behandelt werden. In diesem Studienheft ist zunächst der gesamte Kalkül der Vektorrechnung aufgebaut worden, bevor einige ausgewählte Anwendungen behandelt werden. Eine andere Anordnung des Stoffes ist jedoch denkbar und möglich.

3.1 Die Gerade

Eine Gerade ist festgelegt durch einen Punkt P_1 und durch ihre Richtung. Der Raumpunkt P_1 - dasselbe gilt auch für eine Gerade in einer Koordinatenebene - wird durch einen Ortsvektor gegeben, die Richtung der Geraden wird durch den Richtungsvektor bestimmt. Nennen wir den Ortsvektor, der den Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 festlegt, $\vec{r}_1$ und bezeichnen wir den Richtungsvektor der Geraden $\vec{a}$, so gilt für jeden beliebigen Punkt P auf der Geraden



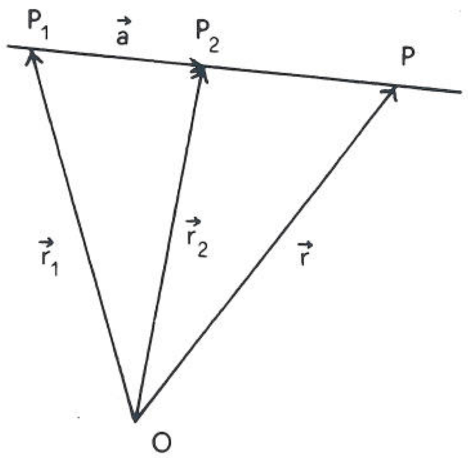
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$$

Dabei ist t irgendeine reelle Zahl: $t \in \mathbb{R}$

Punktrichtungsform der Geraden

Der Parameter t gibt an, wie oft man den Vektor $\vec{a}$ für $t > 0$ bzw. den Vektor $-\vec{a}$ für $t < 0$ von P_1 aus auf der Geraden antragen muß, um zum Punkt P zu gelangen. Für $t = 0$ erhält man den Punkt P_1. Ist $\vec{a}$ Einheitsvektor, so gibt t den Abstand des Punktes P von P_1 auf der Geraden an.

Zwei Punkte des Raumes legen ebenfalls eine Gerade fest. Die Ermittlung der Geradengleichung durch zwei Punkte kann mit Hilfe der schon bekannten Punktrichtungsform durchgeführt werden. Soll die Gerade durch die beiden Punkte P_1 und P_2 verlaufen, so ist der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ ein Richtungsvektor dieser Geraden. Die Gleichung dieser Geraden heißt demnach



Zwei-Punkteform der Geraden

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\overrightarrow{P_1P_2}$$
$$= \vec{r}_1 + t\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Setzt man $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{a}$, so erhält man wieder die Form

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$$

Hat P_1 die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, so heißt die Gleichung der Geraden in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Die Lage einer Geraden g im Raum

Der Richtungsvektor $\vec{a}$ gestattet leicht die Charakterisierung der Lage der Geraden g im Raum. Gilt für $\vec{a}$ zum Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$, so liegt die Gerade parallel zur x-y-Ebene. Oder für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man eine Gerade, die parallel zur y-Achse liegt.

Die Vektorgleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ steht für drei skalare Gleichungen, nämlich

$$x = x_1 + t\, a_x$$
$$y = y_1 + t\, a_y$$
$$z = z_1 + t\, a_z$$

Es ist nun leicht festzustellen, ob ein Punkt P_o $(x_o/y_o/z_o)$ auf einer gegebenen Geraden liegt oder nicht. Man muß die Koordinaten von P_o einsetzen und prüfen, ob die Geradengleichung erfüllt wird: Alle drei Gleichungen

$$x_o = x_1 + t\, a_x$$
$$y_o = y_1 + t\, a_y$$
$$z_o = z_1 + t\, a_z$$

müssen für ein- und denselben Wert t erfüllt sein.

1. Beispiel:

Gegeben sei die Gerade

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es soll untersucht werden, ob die Punkte $P_2(7/-11/-4)$ bzw. $P_3(5/8/-9)$ auf der Geraden liegen.

Soll P_2 auf der Geraden liegen, so muß gelten

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h.
$$7 = 1 + (-2)t$$
$$-11 = -2 + 3t$$
$$-4 = -1 + t$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $t = -3$. Die beiden anderen Gleichungen sind für diesen t-Wert ebenfalls erfüllt. P_2 liegt also auf der Geraden oder die Gerade verläuft durch P_2. Für P_3 ergibt sich

$$\begin{pmatrix}5\\8\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned}5 &= 1 - 2t\\ 8 &= -2 + 3t\\ -9 &= -1 + t\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $t = -2$. Aus der zweiten Gleichung aber $t = \frac{10}{3}$ und aus der dritten Gleichung $t = -8$. P_3 liegt also nicht auf der Geraden.

2. Beispiel:

Wie heißt die Gleichung der Geraden durch die Punkte P_1 (1/3/-2) und P_2 (4/3/2)?

Es ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ also

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

Die Geradengleichung lautet also

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

Die Komponente des Richtungsvektors in y-Richtung ist 0. Die Gerade liegt deshalb parallel zur x-z-Ebene. Weiter ist der Abstand der Punkte P_1 bzw. P_2 von der x-z-Ebene 3. Die Gerade hat also ebenfalls von dieser Ebene den Abstand 3.

Manchmal ist es nützlich, zur Lösung eines Problems die Spurpunkte der Geraden zu ermitteln. Unter einem Spurpunkt versteht man den Schnittpunkt der Geraden mit einer Koordinatenebene. Um den Spurpunkt der Geraden $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$ in der x-y-Ebene zu bestimmen, müssen wir den Punkt der Geraden ermitteln, dessen z-Koordinate 0 ist. Bezeichnen wir diesen Spurpunkt mit S_{xy}, so hat S_{xy} die Koordinaten x, y, 0.

r Spurpunkt

Aus $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

erhält man die Gleichung $0 = z_1 + t\, a_z$ zur Berechnung von t. Falls $a_z \neq 0$ ist, wird der Wert $t = -\frac{z_1}{a_z}$ in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt. $a_z = 0$ bedeutet, daß die Gerade parallel zur x-y-Ebene verläuft oder sogar in der x-y-Ebene liegt.

Beispiel:

Für die Gerade, die durch die beiden Punkte P_1 (1/2/-3) und P_2 (2/0/1) geht, sollen die Spurpunkte bestimmt werden. Die Gleichung der Geraden lautet

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-y-Ebene gilt $z = 0$. Also

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t \\ 0 &= -3 + 4t \end{aligned}$$

Es folgt $t = \frac{3}{4}$ und nach Einsetzen $S_{xy} = (\frac{7}{4} \,/\, \frac{1}{2} \,/\, 0)$.

Analog ist für S_{xz} $y = 0$. Man erhält für $t = 1$ und $S_{xz} = (2 \,/\, 0 \,/\, 1)$.

Für S_{yz} ist $x = 0$ und man bekommt für $t = -1$ $S_{yz} = (0 \,/\, 4 \,/\, -7)$.

Zwei Geraden g_1: $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + t_1\vec{a}_1$ und g_2: $\vec{r}_{II} = \vec{r}_2 + t_2\vec{a}_2$ sind dann und nur dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear sind. — parallele Geraden

Wenn die Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear sind, dann können die beiden Geraden sogar zusammenfallen. Die beiden verschiedenen Gleichungen stellen dann ein und dieselbe Gerade dar. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl P_1 und g_2 als auch P_2 und g_1 inzidieren, d.h. wenn P_1 auf g_2

und P_2 auf g_1 liegt. In diesem Fall ist aber der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ kollinear zu $\vec{a}_1$ bzw. $\vec{a}_2$.

Daraus folgt: zwei Geraden g_1 und g_2 fallen genau dann zusammen, wenn die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ kollinear sind.

Beispiel:

Gegeben seien die drei Geradengleichungen

$$g_1: \vec{r}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{r}_{III} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort, daß die Richtungsvektoren dieser Geraden kollinear sind. Es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und auch} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Geraden g_1, g_2 und g_3 sind also sicher parallel. Es soll geprüft werden, ob nun noch zwei oder gar alle drei Geraden zusammenfallen. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten: Wenn etwa g_1 und g_2 zusammenfallen, dann muß P_2 auf g_1 liegen, d.h. die Koordinaten von P_2 müssen die Gleichung von g_1 erfüllen. Oder der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ muß kollinear sein zu $\vec{a}_1$. Also

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + t_{11}\vec{a}_{11} \iff \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = t_{11}\vec{a}$$

Wenn man einsetzt, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t_{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} -2 &= 1 + 3t_{11} \\ 3 &= 4 + t_{11} \\ -4 &= -2 + 2t_{11} \end{aligned}$$

werden durch $t_{11} = -1$ erfüllt. g_1 und g_2 fallen also zusammen.

Dagegen ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq t_{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

denn die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 3 &= 3t_{12} \\ -1 &= t_{12} \\ -2 &= 2t_{12} \end{aligned}$$

liefern drei verschiedene Werte für t_{12}.
Die Geraden g_1 und g_2 bilden also ein und dieselbe Gerade. Die Gerade g_3 liegt dazu parallel.

Sind zwei Raumgeraden

g_1: $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + t_1\vec{a}_1$ und g_2: $\vec{r}_{II} = \vec{r}_2 + t_2\vec{a}_2$

nicht parallel, so können sie sich schneiden. Haben die beiden Geraden keinen gemeinsamen Schnittpunkt und sind sie auch nicht parallel, so nennt man die beiden Geraden windschief. Die beiden Geraden

windschiefe Geraden

g_1: $\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und g_2: $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

haben den Punkt $P_1(1/2/2)$ gemeinsam. Ihre Richtungsvektoren sind nicht kollinear. Sie schneiden sich also in P_1.

Im allgemeinen kann man jedoch nicht auf den ersten Blick sehen, daß sich zwei Geraden schneiden. Um festzustellen, ob sich zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden und um gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes zu ermitteln, setzt man $\vec{r}_I = \vec{r}_{II}$. Dies führt zu

zwei sich schneidende Geraden

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t_{1s} \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + t_{2s} \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix}$$

und zu den drei skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + t_{1s}\, a_{1x} &= x_2 + t_{2s}\, a_{2x} \\ y_1 + t_{1s}\, a_{1y} &= y_2 + t_{2s}\, a_{2y} \\ z_1 + t_{1s}\, a_{1z} &= z_z + t_{2s}\, a_{2z} \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen kann man t_{1s} und t_{2s} ausrechnen. Die beiden errechneten Werte müssen dann auch die dritte Gleichung erfüllen, wenn sich die Geraden schneiden. Ist die dritte Gleichung nicht erfüllt, so sind die Geraden windschief.

An einem Beispiel soll das Verfahren erläutert werden, an weiteren Beispielen werden die möglichen Sonderfälle diskutiert.

1. Beispiel:

Es soll untersucht werden, ob die beiden Geraden

a) $\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

sich schneiden.

Fall a): Man setzt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_{1s} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_{2s} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2t_{1s} - 4t_{2s} &= 2 \\ -t_{1s} + t_{2s} &= -2 \\ 3t_{1s} - 7t_{2s} &= 2 \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich für $t_{1s} = 3$ und für $t_{2s} = 1$. Diese Werte werden in die dritte Gleichung eingesetzt, die dann ebenfalls erfüllt ist. Die beiden Geraden schneiden sich also in S (7/-2/8) wie sich durch Einsetzen von $t_1 = 3$ in $\vec{r}_I$ ergibt.

Im Beispiel b verfährt man ebenso:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_{1s} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_{2s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und
$$\begin{aligned} t_{1s} - 5t_{2s} &= 1 \\ 2t_{1s} - t_{2s} &= -1 \\ 3t_{1s} + 2t_{2s} &= 1 \end{aligned}$$

In diesem Fall ergibt sich aus den beiden ersten Gleichungen für $t_{1s} = -\frac{2}{3}$ und für $t_{2s} = -\frac{1}{3}$. Die dritte Gleichung ist aber für diese Werte nicht erfüllt. Die beiden Geraden sind windschief.

2. Beispiel:

Gegeben sind die beiden Geraden

$$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_{1s} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_{2s} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} t_{1s} - t_{2s} &= -1 \\ 3t_{1s} - 3t_{2s} &= -3 \\ -t_{1s} + 2t_{2s} &= 4 \end{aligned}$$

In diesem Fall kann man aus den beiden ersten Gleichungen t_{1s} bzw. t_{2s} nicht errechnen. Die beiden Gleichungen sind proportional. Man nimmt deshalb zunächst die erste und die dritte Gleichung. Man erhält dann für $t_{1s} = 2$ und für $t_{2s} = 3$. Für diese beiden Werte ist die zweite Gleichung ebenfalls erfüllt. Die Geraden schneiden sich in S (4/7/-3).

3. Beispiel:

Gegeben sind die Geraden

$$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aus $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_{1s} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_{2s} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

erhält man das System

$$\begin{aligned} t_{1s} + 2t_{2s} &= -1 \\ -2t_{1s} - 4t_{2s} &= 3 \\ -3t_{1s} - 6t_{2s} &= 1 \end{aligned}$$

In diesem System sind die Terme auf den linken Seiten der Gleichungen proportional. Die Variablen t_{1s} und t_{2s} lassen sich deswegen nicht berechnen. Die Zahlen auf den rechten Seiten sind jedoch nicht in der gleichen Weise proportional. Das System enthält einen Widerspruch. Die Geraden schneiden sich nicht. Nun sieht man aber leicht, daß die Richtungsvektoren der Geraden kollinear sind. Die Geraden sind also parallel.

Wären schließlich in einem solchen System nicht nur die linken Seiten proportional, sondern in der gleichen Weise auch die Absolutglieder auf der rechten, so handelte es sich um zwei zusammenfallende Geraden.

Abschließend kann festgestellt werden: Zwei Raumgeraden schneiden sich dann und nur dann, wenn die aus $\vec{r}_1 + t_{1s}\,\vec{a}_1 = \vec{r}_2 + t_{2s}\,\vec{a}_2$ sich ergebenden Koordinatengleichungen sich eindeutig nach t_{1s} bzw. nach t_{2s} auflösen lassen.

3.1.1 Aufgaben

A. 36

Gegeben sind die beiden Punkte P_1 (2/-4/3) und P_2 (1/-12/-3)

a) Wie heißt die Gleichung der Geraden durch P_1 und P_2?

b) Welcher der Punkte P_3 (4/12/15) oder P_4 (-1/3/0) liegt auf dieser Geraden?

c) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden

A. 37

Gegeben sind die Geraden

$$g_1:\ \vec{r}_I = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2:\ \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_3:\ \vec{r}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_4:\ \vec{r}_{IV} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Welche Geraden sind parallel, welche fallen zusammen?

A. 38

Gegeben sind die Punkte P_1 (2/1/1), P_2 (3/0/5) *und* P_3 (4/-1/-2)

a) *Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch* P_3 *verläuft und parallel zu der Geraden durch* P_1 *und* P_2 *ist.*

b) *Wie muß man* y_4 *und* z_4 *wählen, damit der Punkt* P_4 $(6/y_4/z_4)$ *auf dieser Parallelen liegt?*

A. 39

Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-y-Ebene. Welchen Winkel schließt diese Gerade mit der x-y-Ebene ein?

A. 40

Gegeben sind die vier Punkte P_1 (2/-1/-2), P_2 (8/3/-4), P_3 (1/-7/3) *und* P_4 (-4/3/-7)

a) *Zeigen Sie, daß die vier Punkte in einer Ebene liegen.*

b) *Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden* P_1P_2 *und* P_3P_4 *und den Schnittwinkel zwischen diesen beiden Geraden.*

A. 41

Gegeben ist die Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

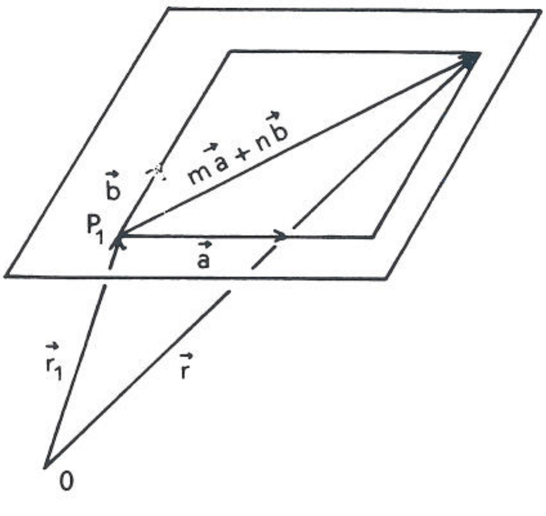
a) Begründen Sie, weshalb diese Gerade in der x-y-Ebene liegt.

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden in parameterfreier Form (y = m x + n) an.

c) Welche Beziehung besteht zwischen der Steigung m der Geraden und dem Richtungsvektor der Geraden?

3.2 DIE EBENE

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei sich schneidende Geraden. Die beiden Geraden $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + m\,\vec{a}$ und $\vec{r}_{II} = \vec{r}_1 + n\,\vec{b}$ schneiden sich in P_1 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$. Durch die Linearkombination $m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$ werden Vektoren gebildet, die komplanar zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind. Durch geeignete Wahl der Parameter m und n können also alle beliebigen Punkte der Ebene, die durch P_1 und $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festgelegt ist, erreicht werden.



Alle Punkte dieser Ebene müssen also der Bedingung

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$$

genügen.

Zu irgend zwei Zahlen m und n gehört eindeutig ein Punkt der Ebene. Andererseits gibt es für einen Punkt der Ebene zwei Zahlen m und n. Die Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene und den Parametern m und n ist umkehrbar eindeutig.

Da die Ebene durch den Punkt P_1 und die Richtungsvektoren

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ festgelegt ist, heißt

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$$

Punktrichtungsform der Ebenengleichung oder wegen der in der Gleichung vorkommenden Parameter m und n auch Parameterform.

Punktrichtungsform der Ebene

Parameterform

Beispiel:

Die beiden sich schneidenden Geraden

$$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bestimmen die Ebene mit der Gleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Zahlen m = 3 und n = 4 legen eindeutig den Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fest. Dieser Vektor ist der Ortsvektor des Punktes P_2 (18/2/0). Es gibt keine anderen Zahlen, die denselben Punkt ergeben.

Wenn nun andererseits der Punkt P_3 (2/4/-4) in dieser Ebene liegen soll, so müssen sich eindeutig die Parameterwerte m_p und n_p ermitteln lassen. Der Ortsvektor von P muß die Ebenengleichung erfüllen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m_p \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + n_p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$2 = 1 + 3m_p + 2n_p$$

$$4 = 1 - m_p + n_p$$

$$-4 = 2 + 2m_p - 2n_p$$

Aus der ersten und dritten Gleichung findet man $m_p = -1$ und $n_p = 2$. Diese Werte erfüllen aber auch die zweite Gleichung.

Der Punkt P_3 (2/4/-4) liegt also in der Ebene. Der Punkt P_4 (5/1/3) dagegen liegt nicht in der Ebene, weil seine Koordinaten die Ebenengleichung nicht erfüllen. Aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m_p \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + n_p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das System

$$5 = 1 + 3m_p + 2n_p$$
$$1 = 1 - m_p + n_p$$
$$3 = 2 + 2m_p - 2n_p$$

Aus der ersten und dritten Gleichung erhält man für $m_p = 1$ und für $n_p = -1$. Diese Werte erfüllen nun aber die zweite Gleichung nicht. Daher kann man sagen, daß P_4 nicht in der Ebene liegt.

Eine Ebene kann also - nach den bisherigen Feststellungen - durch zwei verschiedene, sich schneidende Geraden festgelegt werden. Diese beiden Geraden dürfen nicht zusammenfallen. In der Gleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$ dürfen daher die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sein.

Nun kann eine Ebene aber auch durch drei Punkte P_1, P_2 und P_3 bestimmt werden. Diese drei Punkte dürfen aber nicht alle auf einer Geraden liegen. Sind drei Punkte P_1, P_2 und P_3, die nicht auf einer Geraden liegen, gegeben, so bestimmt man zwei Richtungsvektoren. Die beiden nichtkollinearen Richtungsvektoren $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und $\vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ ergeben zusammen mit dem Ortsvektor von P_1 die Punktrichtungsform der Ebenengleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$. Setzt man $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ ein, so ergibt sich

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + n(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

Dreipunkteform

Man nennt diese Form der Ebenengleichung Dreipunkteform.

Beispiel:

Gegeben sind die drei Punkte P_1 (1/2/3), P_2 (2/1/-3) und P_3 (-1/1/2).
Es soll gezeigt werden, daß diese Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen. Sodann soll die Gleichung der Ebene durch diese drei Punkte ermittelt werden.

Es ist $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und es ist

$\vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist nicht kollinear mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Daher können die Punkte P_1, P_2 und P_3 nicht auf einer Geraden liegen. Die Gleichung der Ebene lautet $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

parallele Geraden bestimmen eine Ebene

Zwei parallele Geraden, die nicht zusammenfallen, bestimmen ebenfalls eindeutig eine Ebene. Die Gleichungen dieser beiden Geraden seien: $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + m_1\vec{a}$ und $\vec{r}_{II} = \vec{r}_2 + m_2\vec{b}$. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen kollinear sein und es soll $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ nicht kollinear sein zu $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$. Die Punktrichtungsform der Ebene, die durch diese beiden parallelen Geraden festgelegt ist, hat jetzt die Form:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Beispiel:

Gegeben seien die beiden parallelen Geraden

$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Wie heißt die Gleichung der Ebene, die durch diese Gerade bestimmt ist?

Die beiden Geraden sind parallel, da ihre Richtungsvektoren kollinear sind. Sie sind verschieden, weil $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

nicht kollinear ist mit diesen Richtungsvektoren. Die Ebenengleichung heißt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Aufgaben

A. 42

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die durch die Gerade $\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a}$ und den Punkt P_2 festgelegt wird.

Geben Sie für das Beispiel $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_2\ (-3/1/2)$

die Ebenengleichung an und prüfen Sie, ob die Punkte $P_3\ (9/-3/-1)$ und $P_4\ (1/3/-4)$ in dieser Ebene liegen.

A. 43

Wie heißt die Gleichung der x-y-Ebene bzw. der x-z-Ebene im kartesischen Koordinatensystem?
Wie heißt die Gleichung der Ebene durch den Punkt $P_1\ (3/3/3)$ parallel zur y-z-Ebene im kartesischen Koordinatensystem?

A. 44

Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die durch den Punkt $P_2\ (2/3/4)$ parallel zu der Ebene

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *verläuft.*

A. 45

Prüfen Sie, ob die beiden Geraden

$\vec{r}_I = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

in einer Ebene liegen. Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung dieser Ebene an.

A. 46

Zeigen Sie, daß die vier Punkte $P_1\ (1/-1/1)$, $P_2\ (3/-7/4)$, $P_3\ (1/0/-5)$ und $P_4\ (2/-3/-4)$ nicht in einer Ebene liegen. Geben Sie die Gleichungen der Ebenen durch $P_1 P_2$ und P_3 bzw. durch $P_2 P_3$ und P_4 an.

A. 47

Gegeben sind die beiden parallelen Geraden $\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ *Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die durch diese Geraden festgelegt wird. Untersuchen Sie, ob eine der beiden Geraden* $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ *oder* $\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \\ -12 \end{pmatrix}$ *ebenfalls in dieser Ebene liegt.*

3.3 GEGENSEITIGE LAGE VON GERADE UND EBENE IM RAUM

Die Gerade: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$ kann zu der Ebene: $\vec{r} = \vec{r}_2 + m\,\vec{b} + n\,\vec{c}$ zwei wesentlich verschiedene Lagen haben: Die Gerade kann die Ebene schneiden oder die Gerade kann parallel zu der Ebene liegen. Die Gerade ist dann und nur dann parallel zu der Ebene, wenn die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind. Die Komplanarität von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ schließt dann auch den Fall ein, daß die Gerade in der Ebene liegt. Auch dann sind nämlich die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar.

Außerdem liegt dann aber auch der Punkt P_1 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ in der Ebene. Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt S, wenn die drei Richtungsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht komplanar sind. Um herauszufinden, welcher der beiden Fälle vorliegt, wird zunächst untersucht, ob die Richtungsvektoren komplanar sind oder nicht. Die Vektoren $\vec{a}$ $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn das Spatprodukt $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ Null ist.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

Ist dieses Produkt Null, so wird untersucht, ob der Punkt P_1 in der Ebene liegt. Daraus ergibt sich dann, ob auch die Gerade g in der Ebene liegt.

Ermittlung des Schnittpunktes

Ist dieses Produkt aber nicht Null, dann soll der Schnittpunkt von g mit E berechnet werden. Dazu setzt man:

$$\vec{r}_1 + t_s\,\vec{a} = \vec{r}_2 + m_s\,\vec{b} + n_s\,\vec{c}$$

Diese Vektorgleichung führt auf drei skalare Gleichungen mit den drei Unbekannten t_s, m_s und n_s. Es genügt, t_s zu berechnen. Durch Einsetzen von t_s in die Geradengleichung erhält man den Schnittpunkt S.

Für die drei Fälle 1) g liegt parallel zu E, 2) g liegt in E und 3) g schneidet E wird je ein Beispiel durchgerechnet.

Beispiel 1:

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Um die Lage der Geraden g zur Ebene E zu untersuchen, bildet man zunächst das Spatprodukt der Richtungsvektoren.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 20 - 36 + 20 - 12 + 12 = 0$$

Das Spatprodukt hat den Wert Null. Die Richtungsvektoren sind also komplanar. Wenn nun P_1 (-5/3/4) in E liegt, dann liegt g in E. Man setzt deswegen an:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 2m - 2n &= -6 \\ 2m + 2n &= 4 \\ 3m + n &= 2 \end{aligned}$$

Aus den ersten Gleichungen erhält man $m = -\frac{1}{2}$ und $n = \frac{5}{2}$. Diese Werte erfüllen jedoch die dritte Gleichung nicht. Das System enthält einen Widerspruch. P_1 liegt nicht in E.

Die Gerade g ist also echt parallel zu der Ebene E.

Eine etwas andere Überlegung führt auf einem vielleicht eleganteren Weg schneller zum Ziel. Wenn P_1 in der Ebene E liegt, dann ist der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ komplanar zu den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$. In diesem Fall muß auch das Spatprodukt $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ sein.
Ist dieses Produkt jedoch nicht Null, so kann P_1 nicht in E liegen. In unserem Beispiel ist $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

also $\quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$

P_1 liegt also nicht in der Ebene E. Dann kann auch die Gerade g nicht in der Ebene E liegen.

Beispiel 2:

Gegeben ist wieder die Ebene E:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine andere Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Das Spatprodukt der Richtungsvektoren

$$\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

verschwindet wieder. Nun ist aber auch das Spatprodukt

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ist komplanar zu den Richtungsvektoren der Ebene. P_1 liegt in der Ebene. Infolgedessen liegt auch die Gerade g in der Ebene.

Beispiel 3:

Auch hier ist die gleiche Ebene E gegeben:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g sei: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Das Spatprodukt aus den Richtungsvektoren

$$\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

verschwindet jetzt nicht. $\vec{a}$ ist also nicht komplanar mit $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Die Gerade muß also die Ebene schneiden. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m_s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + n_s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\,t_s - 2\,m_s + 2\,n_s &= -4 \\ t_s - 2\,m_s - 2\,n_s &= -2 \\ 3\,t_s - 3\,m_s - n_s &= -2 \end{aligned}$$

für t_s, m_s und n_s. Aus diesem System braucht nun aber lediglich t_s berechnet zu werden. Für t_s erhält man

$$t_s = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8} = 2$$

$t_s = 2$ in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E.

$$\vec{r}_s = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Dann hat der Schnittpunkt S die Koordinaten S (9/3/10). Bei weiterer Berechnung des Systems findet man für $m_s = 3$ und für $n_s = -1$. Setzt man diese Werte in die Ebenengleichung ein, erhält man ebenfalls wieder den Punkt S. Wie schon gesagt, ist es jedoch völlig ausreichend, t_s zu berechnen. Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Berechnung von t_s nur möglich ist, wenn die Nennerdeterminante verschieden von Null ist. Diese wird aber aus den Richtungsvektoren gebildet und ist das Spatprodukt dieser Vektoren. Wenn also die Nennerdeterminante Null ist, liegt die Gerade parallel zu der Ebene.

3.3.1 Aufgaben

A. 48

Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt der Geraden g durch die beiden Punkte P_3 (-10/-10/6) und P_4 (-3/4/-15) mit der

Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A. 49

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Untersuchen Sie, welche Lage die Gerade g in bezug auf diese Ebene einnimmt.

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$

A. 50

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

und der Punkt P_o (31/-23/-6).
Zeigen Sie, daß P_o nicht in E liegt. Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die durch P_o geht und senkrecht zu E ist. In welchem Punkt trifft diese Senkrechte die Ebene?

A. 51

Zeigen Sie, daß die vier Punkte P_1 (-1/-1/-1) P_2 (-1/0/11), P_3 (-5/-7/-19) und P_4 (-34/16/-6) ein Tetraeder bilden. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P_4 von der gegenüberliegenden Tetraederfläche. (Anleitung: Verfahren Sie ähnlich wie bei Aufgabe 50)

3.4 Schnittgerade zweier Ebenen

Auch für die gegenseitige Lage zweier Ebenen zueinander gibt es - wie bei Gerade und Ebene - zwei wesentlich verschiedene Fälle. Zwei Ebenen können sich schneiden oder parallel sein. Die Parallelität enthält auch den Sonderfall, daß die beiden Ebenen zusammenfallen.

Die beiden Ebenen E_1: $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + m_1\vec{a}_1 + n_1\vec{b}_1$ und E_2: $\vec{r}_{II} = \vec{r}_2 + m_2\,\vec{a}_2 + n_2\,\vec{b}_2$ sind dann und nur dann parallel, wenn die Richtungsvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ komplanar sind. Wenn diese vier Richtungsvektoren komplanar sind, kann E_1 sogar mit E_2 zusammenfallen. Dann muß aber P_1 in E_2 liegen und P_2 muß in E_1 liegen. Diese Bedingung ist äquivalent mit der Bedingung, daß der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ komplanar zu $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ bzw. $\vec{a}_2$, $\vec{b}_2$ ist. Durch zwei Beispiele sollen diese beiden Möglichkeiten verdeutlicht werden.

Beispiele:

Gegeben sind die beiden Ebenen

a) $$\vec{r}_I = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + m_1\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + n_1\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix} + n_2\begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}$$

und

b) $$\vec{r}_I = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + m_1\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + n_1\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix}6\\-1\\6\end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix}-3\\-1\\10\end{pmatrix} + n_2\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Es soll untersucht werden, ob die Gleichungen echt parallele Ebenen darstellen oder ob es sich sogar um dieselbe Ebene handelt.

Zunächst muß überprüft werden, ob die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}7\\5\\-7\end{pmatrix}$$

komplanar sind. Dies ist tatsächlich auch der Fall, weil die beiden Spatprodukte

$$\vec{a}_1\,(\vec{b}_1 \times \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und
$$\vec{a}_1\,(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden. Jetzt muß weiter untersucht werden, ob P_2 in E_1 liegt. Dies geschieht am schnellsten mit Hilfe des Spatproduktes

$$\vec{a}_1\,[\vec{b}_1 \times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ist nicht komplanar mit $\vec{a}_1$ und $\vec{b}_1$. Er liegt also nicht in der Ebene E_1. In diesem Beispiel handelt es sich also um zwei verschiedene parallele Ebenen.

Für das Beispiel b) wird ebenso verfahren. Es ist

$$\vec{a}_1\,(\vec{b}_1 \times \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

und
$$\vec{a}_1\,(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ sind also komplanar.
Weiterhin ist

$$\vec{a}_1\,[\vec{b}_1 \times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Der Vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ist auch komplanar zu $\vec{a}_1$ und $\vec{b}_1$. P_2 liegt also in der Ebene E_1. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 fallen also zusammen. Die beiden Gleichungen für $\vec{r}_I$ und $\vec{r}_{II}$ stellen ein und dieselbe Ebene dar.

Wenn nun die beiden Ebenen nicht parallel sein sollen, dann dürfen die Richtungsvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ nicht alle komplanar sein. Nicht parallele Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Zunächst soll nun für einen Sonderfall die Ermittlung der Schnittgeraden zweier Ebenen erklärt werden. Als eine der beiden Ebenen wird die x-y-Ebene angenommen. Die Schnittgerade einer beliebigen Ebene des Raumes mit einer Koordinatenebene nennt man Spurgerade. Gegeben sei die Ebene E

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es soll die x-y-Spurgerade (d.h. die Schnittgerade der Ebene mit der x-y-Ebene) bestimmt werden. Die x-y-Ebene hat die Gleichung $z = 0$. Daraus ergibt sich als Bedingung für alle Punkte der gegebenen Ebene, die in der x-y-Ebene liegen sollen $-2 - m + 3n = 0$ oder $m = -2 + 3n$. Man erhält also eine lineare Gleichung zwischen den Parametern m und n. Wenn man $m = -2 + 3n$ in die Ebenengleichung einsetzt, erhält man

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2 + 3n) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nach Umformung und Zusammenfassung ergibt sich

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden mit dem einen Parameter n. Die Gerade liegt in der x-y-Ebene, denn der Punkt (-4/-3/0) liegt in der x-y-Ebene und der Richtungsvektor hat die z-Koordinate Null. Er liegt also auch in der x-y-Ebene. Alle Punkte dieser Geraden liegen aber auch in der gegebenen Ebene É. Die Gerade ist also die gesuchte Spurgerade.

Das Beispiel zeigt, wie man allgemein vorgehen kann, um die Schnittgerade zweier Ebenen zu bestimmen. Aus der Gleichung für die Ebene allgemeiner Lage und aus der Gleichung für die Koordinatenebene läßt sich eine Beziehung zwischen den beiden Parametern der Ebenengleichung herleiten. Diese Beziehung erlaubt es, einen der beiden Parameter zu eliminieren. Man erhält dann eine Gleichung mit einem Parameter. Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Im Folgenden soll nun für zwei Ebenen des Raumes in allgemeiner Lage die Schnittgerade berechnet werden. Mit Hilfe dieses Beispiels wird dann das allgemeine Verfahren erläutert.

Beispiel:

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_I:\ \vec{r}_I = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

und
$$E_{II}:\ \vec{r}_{II} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Für alle gemeinsamen Elemente von E_I und E_{II} müssen die rechts stehenden Terme der beiden Gleichungen gleich sein:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Diese Vektorengleichung liefert drei skalare Gleichungen mit vier variablen Parametern m_1, n_1, m_2 und n_2. Aus diesen Gleichungen kann man einen Parameter als Funktion eines anderen Parameters berechnen, zum Beispiel $m_1 = m_1(n_1)$. Mit Hilfe dieser Beziehung kann man durch Einsetzen in die erste Ebenengleichung m_1 bzw. n_1 eliminieren. Man erhält dann eine Vektorgleichung mit nur einem Parameter, eben die Gleichung der Schnittgeraden.

Aus der obigen Vektorgleichung erhält man, wenn man noch entsprechend ordnet, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 - 2n_2 &= 1 - 2n_1 \\ 3m_1 - 6m_2 - n_2 &= -3 + 2n_1 \\ -2m_1 + 4m_2 + n_2 &= 2 - n_1 \end{aligned}$$

Nach der Cramer'schen Regel wird m_1 berechnet:

$$m_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-2n_1 & -1 & -2 \\ -3+2n_1 & -6 & -1 \\ 2-n_1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3+n_1}{-1} = 3 - n_1$$

In die Gleichung für E_I wird nun $m_1 = 3 - n_1$ eingesetzt.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3-n_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + n_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

Abschließend zu diesem Beispiel noch zwei wichtige Anmerkungen: 1. Notwendige Voraussetzung dafür, daß das Gleichungssystem überhaupt nach m_1 aufgelöst werden kann, ist das Nichtverschwinden der Koeffizientendeterminante des Systems. Die Koeffizientendeterminante stellt aber das Spatprodukt der beiden Richtungsvektoren von E_{II} und eines Richtungsvektors von E_I dar. Ist dieses Spatprodukt nicht Null, dann sind die Vektoren nicht komplanar. Also schneiden sich die Ebenen. Das Gleichungssystem kann wie im Beispiel aufgelöst werden. Ist aber das Spatprodukt Null, so muß sich, sollen sich die beiden Ebenen schneiden, das System nach n_1 auflösen lassen. Das bedeutet, daß die Richtungsvektoren von E_2 und der andere Richtungsvektor von E_1 nicht komplanar sein dürfen. Das zugehörige Spatprodukt - es ist gleich der Koeffizientendeterminante des dann gebildeten Gleichungssystems - ist dann von Null verschieden.

2. In dem System von drei Gleichungen mit vier variablen Parametern kann jeder Parameter als Funktion eines anderen Parameters berechnet werden. Für die Lösung des Problems

ist es jedoch nur sinnvoll, eine Beziehung zwischen zwei Parametern, die derselben Ebenengleichung angehören, herzustellen; d.h. also zwischen m_1 und n_1 oder zwischen m_2 und n_2.

3.4.1 Aufgaben

A. 52

Die Ebene E ist bestimmt durch ihre Spurgeraden

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Außerdem ist die*

Gerade g $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *gegeben.*

a) Um welche Spurgeraden handelt es sich?

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene an.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

A. 53

Die Ebene E_1 ist gegeben durch die Spurgerade

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und den Punkt P_1 (5/5/8). Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_2 an, die zu der Ebene E_1 parallel ist.*

A. 54

Gegeben ist die Ebene E_1 durch die beiden parallelen Geraden

Geraden $\vec{r}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}_{II} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E_2 ist durch die ebenfalls parallelen Geraden

$\vec{r}_{III} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}_{IV} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *bestimmt.*

Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von E_1 mit E_2. Wie liegt diese Gerade?

A. 55

Gegeben sind die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3.

$$E_1 \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die Lage der Ebenen E_2 bzw. E_3 in bezug auf E_1.

A. 56

Gegeben ist die Ebene E_1 durch die drei Punkte P_1 (8/2/-4), P_2 (18/9/-13) und P_3 (4/-5/-1). Bestimmen Sie die Schnittgerade von E_1 mit der Ebene E_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A. 57

Gegeben ist die Ebene E_1 durch ihre Spurgeraden $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und die Ebene E_2 ebenfalls durch ihre Spurgeraden* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *. Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen.*

3.5 Normalenform der Geraden- und Ebenengleichung

Bisher sind die sogenannten Parameterformen von Gerade und Ebene behandelt worden. Die Angabe der Geraden- bzw. Ebenengleichung in dieser Form bietet sich an, wenn die Gerade festgelegt ist durch einen Punkt und einen Richtungsvektor oder durch zwei Punkte bzw. wenn die Ebene gegeben ist durch einen Punkt und zwei verschiedene Richtungsvektoren oder durch drei Punkte. Man kann eine Gerade bzw. eine Ebene auch festlegen durch den sogenannten Normalenvektor. Dies ist ein Vektor, der senkrecht ist zu der Geraden bzw. zu der Ebene.
Beginnen wir mit der Ebene. Es gibt unendlich viele Ebenen, die zu einem bestimmten Vektor senkrecht sind. Die Ebenen sind alle untereinander parallel. Zur eindeutigen Festlegung einer Ebene benötigt man dann noch einen Punkt, durch den die Ebene laufen soll. Eine Ebene kann also eindeutig festgelegt werden durch einen Punkt und den Normalenvektor der Ebene. Der Normalenvektor ist ein freier Vektor. Er ist senkrecht zu jeder Geraden, die in der Ebene liegt.

Eine Raumgerade kann auf diese Weise jedoch nicht eindeutig festgelegt werden, weil es zu einer Geraden unendlich viele Normalenvektoren (verschiedener Richtung) gibt und weil es umgekehrt auch zu einem gegebenen Vektor unendlich viele Geraden gibt, die senkrecht sind. Beschränkt man sich jedoch nur auf eine Ebene, zum Beispiel die x-y-Ebene, so gibt es nur eine einzige Gerade, die durch einen Punkt geht und dazu noch senkrecht ist zu einem gegebenen Vektor.

Wird nun eine Gerade bzw. eine Ebene festgelegt durch einen Punkt und einen Normalenvektor, so haben die daraus sich ergebenden Gleichungen für die Gerade bzw. für die Ebene die gleiche Form. Gerade und Ebene werden daher gleichzeitig nebeneinander behandelt.

Wenn $\vec{r}_1$ der Ortsvektor des Punktes P_1 und r der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P von der Geraden bzw. von der

Ebene ist, dann liegt der Vektor $\vec{r} - \vec{r}_1$ auf der Geraden bzw. in der Ebene. Der Normalenvektor soll mit $\vec{n}$ bezeichnet werden. Die beiden Vektoren $\vec{r} - \vec{r}_1$ und $\vec{n}$ sind senkrecht zueinander. Das Skalarprodukt $(\vec{r} - \vec{r}_1)\vec{n}$ hat also den Wert Null.

$$(\vec{r} - \vec{r}_1)\vec{n} = 0$$

oder $$\vec{r}\, n - \vec{r}_1\, \vec{n} = 0$$

Das Produkt $\vec{r}_1\vec{n}$ ergibt eine Zahl D, sodaß man schreiben kann $\vec{r}\,\vec{n} - D = 0$. Alle Punkte der Geraden bzw. der Ebene müssen dieser Gleichung genügen. Die Form der Gleichung ist, wie schon erwähnt, für Gerade und Ebene gleich und heißt Normalenform. Die Normalenform ist parameterfrei.

Der Normalenvektor der Geraden soll $\vec{n} = \binom{A}{B}$ sein. Durch Einsetzen und ausrechnen erhält man

$$\binom{x}{y}\binom{A}{B} - D = 0$$

d.h. $$Ax + By = D$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene.

In der gleichen Weise erhält man für die Gleichung einer Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} - D = 0$$

d.h. $$A\,x + B\,y + C\,z = D$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene.

Allgemein kann also gesagt werden:

Eine lineare Gleichung in zwei Variablen x und y stellt eine Gerade in der x-y-Ebene dar und eine lineare Gleichung mit drei Variablen x, y und z stellt eine Ebene im Raum dar. Während die Geraden- bzw. die Ebenengleichung in der Parameterform äquivalent ist mit drei skalaren Gleichungen, stellt die Normalenform der Geraden- bzw. Ebenengleichung eine einzige skalare Gleichung in den Koordinaten dar.

Alle bisher besprochenen Probleme - Charakterisierung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen oder Bestimmung der Schnittgebilde von Geraden und Ebenen - lassen sich auch lösen, wenn die Geraden bzw. die Ebenen in der Normalenform gegeben sind. Vielfach lassen sich derartige Aufgabenstellungen in der Normalenform sogar noch eleganter - weil mit geringerem Rechenaufwand - lösen. Darüberhinaus ermöglichen die Normalenformen die Behandlung und Lösung weiterer Probleme wie zum Beispiel Abstandsberechnungen und die Ermittlung des Schnittwinkels zweier Ebenen. Deshalb ist es häufig zweckmäßig, eine in der Parameterform gegebene Gleichung von Gerade bzw. Ebene in die Normalenform umzuformen.

Im folgenden wird nun erklärt und an Beispielen erläutert, wie man von einer Parameterform der Geraden- bzw. Ebenengleichung zu einer Normalform der Geraden- bzw. Ebenengleichung gelangt.

Sind die Gleichungen $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$ bzw. $\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$ gegeben, so kann man immer so vorgehen, daß aus den entsprechenden skalaren Gleichungen die Parameter eliminiert werden und eine Gleichung in x, y bzw. in x, y, z hergestellt wird. Ein Beispiel mag genügen, um das Verfahren zu erklären.

Gegeben ist die Ebenengleichung in der Form

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

das heißt
$$\begin{aligned} x &= 3 + 2m - n \\ y &= -1 + m + n \\ z &= 2 - 3m + 3n \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich

$$m = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad n = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$$

Wenn m und n in die dritte Gleichung eingesetzt werden, erhält man

$$2x - y + z = 9$$

oder $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{r} - 9 = 0$$

Dies ist die Normalenform für die gegebene Ebene. Ein anderes Verfahren führt schneller zum Ziel. Man berechnet zunächst einen Normalenvektor für die Gerade bzw. für die Ebene. Mit diesem wird dann die Geraden- bzw. Ebenengleichung skalar multipliziert. Für die Gerade $\vec{r} = \binom{1}{-2} + t \binom{2}{3}$ ist zum Beispiel $\vec{n} = \binom{3}{-2}$ ein Normalenvektor, weil das Skalarprodukt $\binom{2}{3} \binom{3}{-2} = 0$ ist.
Wenn man die Geradengleichung skalar mit $\vec{n}$ multipliziert, erhält man deswegen

$$\binom{3}{-2}\vec{r} = \binom{1}{-2} \binom{3}{-2} = 7$$

oder $$3\,x - 2\,y = 7$$

Im Fall der Ebene ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der beiden Richtungsvektoren der Ebene $\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n\,\vec{b}$ ein Vektor, der senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$ ist. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist also ein Normalenvektor der Ebene.

Für das Beispiel $$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist $$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \vec{e}_x \\ 1 & 1 & \vec{e}_y \\ -3 & 3 & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dann ist $$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 27$$

Eine Division durch 3 ergibt völlige zahlenmäßige Übereinstimmung mit dem oben bereits berechneten Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{r} = 9$$

Ist die Aufgabe gestellt, für eine in der Normalenform gegebene Gerade bzw. Ebene eine Parameterform anzugeben, so kann man für die Gerade zwei Punkte bestimmen, die der Geraden angehören und für die Ebene drei Punkte ermitteln, die in der Ebene liegen. Dann ist es leicht, mit Hilfe dieser Punkte die Parameterform der Geraden bzw. der Ebene anzugeben. Wie angedeutet, soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

3.6 ABSTANDSBERECHNUNGEN. HESSESCHE NORMALFORM

Im folgenden sollen nun Probleme behandelt werden, für deren Lösung die Normalenform der Geraden- und Ebenengleichung benötigt wird. Ein solch typisches Beispiel ist die Bestimmung des Abstandes des Nullpunktes (Koordinatenursprunges) von einer Geraden bzw. von einer Ebene. Der Abstand wird gemessen auf einem Lot vom Nullpunkt zu der Geraden bzw. zu der Ebene. Der Normalenvektor wird durch den Nullpunkt gelegt und fällt dann auf das Lot.

Abb.1

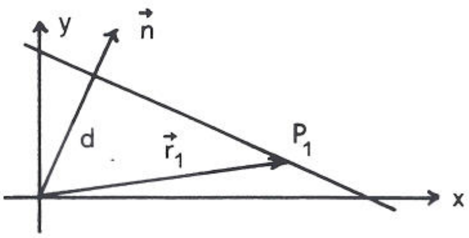
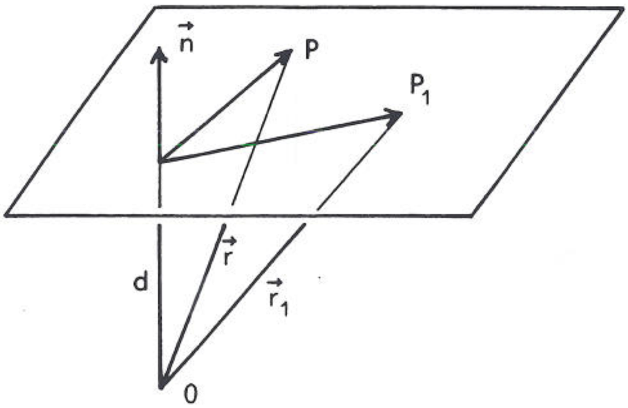


Abb.2



Aus den beiden Darstellungen kann man ablesen

$$d = |\vec{r}_1| \cos \sphericalangle(\vec{r}_1, \vec{n})$$

Nun ist aber $\vec{n}\,\vec{r}_1 = |\vec{n}|\,|\vec{r}_1| \cos \sphericalangle(\vec{r}_1\ \vec{n}) = |\vec{n}|\ d$

Daraus ergibt sich für d

$$d = \frac{\vec{n}\,\vec{r}_1}{|\vec{n}|} = \vec{n}^o\,\vec{r}_1$$

$\vec{n}^o$ ist der Einheitsvektor von $\vec{n}$. Daher heißt $\vec{n}^o$ Normaleneinheitsvektor.
Das Skalarprodukt $\vec{n}\,\vec{r}_1$ und damit auch das Produkt $\vec{n}^o\,\vec{r}_1 = d$ kann positiv oder negativ sein. Es ist positiv, wenn $\cos \measuredangle(\vec{n}, \vec{r}_1) > 0$ ist. Dann ist der Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{n}$ kleiner als 90^0. Der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt dann vom Nullpunkt zur Ebene. Ist aber $\vec{n}\,\vec{r}_1 < 0$ also auch $\cos \measuredangle(\vec{n}, \vec{r}_1) < 0$, dann weist $\vec{n}$ von der Ebene zum Nullpunkt. (siehe Bild 3)

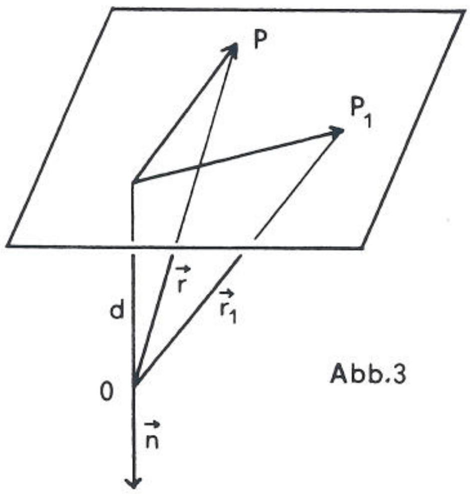


Abb.3

Der Normalenvektor $\vec{n}$ wird nun so orientiert, daß er vom Nullpunkt zur Ebene bzw. zur Geraden verläuft.

Dann ist das Skalarprodukt $\vec{n}\,\vec{r}_1$ immer größer als Null. Ebenso ist $\vec{n}^o\,\vec{r}_1 = d > 0$. Durch d wird dann immer der Abstand der Geraden bzw. der Ebene vom Nullpunkt angegeben.

Zur Berechnung des Abstandes einer Geraden bzw. einer Ebene vom Nullpunkt geht man aus von der Normalenform

$$\vec{n}\,\vec{r} - D = 0$$

$\vec{n}$ wird so orientiert, daß $\vec{n}\,\vec{r}_1 = D > 0$ ist.
Dies geschieht gegebenenfalls durch eine Vorzeichenänderung der Koordinaten von $\vec{n}$. Dann wird diese Gleichung durch $|\vec{n}|$ dividiert. Man sagt, die Gleichung wird normiert. Es ergibt sich dabei

$$\frac{\vec{n}\,\vec{r}}{|\vec{n}|} - \frac{\vec{n}\,\vec{r}_1}{|\vec{n}|} = 0$$

oder $$\vec{n}^o\,\vec{r} - \vec{n}^o\,\vec{r}_1 = 0$$

Mit $\vec{n}^o\,\vec{r}_1 = d$ erhält man

$$\vec{n}^o\,\vec{r} - d = 0$$

Dies ist die Hessesche Normalform der Geraden- bzw. der Ebenengleichung. Der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}^o$ zeigt vom Nullpunkt zur Geraden bzw. zur Ebene. Er wird in diesem Fall Stellungsvektor der Geraden bzw. der Ebene genannt.

Beispiel:

Gegeben ist die Ebene

$$E: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Welchen Abstand hat diese Ebene vom Nullpunkt?

Ein Normalenvektor der Ebene ist

$$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 0 & \vec{e}_x\\2 & -1 & \vec{e}_y\\2 & -2 & \vec{e}_z\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Dann ist die Normalform der Ebenengleichung

$$\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}\vec{r} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Das ist $$\begin{pmatrix}-2\\6\\-3\end{pmatrix}\vec{r} = -14$$

Es ist D = - 14 < 0. Der Normalenvektor wird entgegengesetzt orientiert. Wir erhalten dann

$$\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\vec{r} = 14$$

Diese Gleichung wird jetzt normiert. Dabei erhält man

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\vec{r} = \frac{14}{7} = d = 2$$

Der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist also 2. Der Vektor $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ ist der Stellungsvektor der Ebene.

Die Berechnung des Abstandes eines beliebigen Punktes P_0 von einer Geraden g bzw. von einer Ebene E ist ein Problem, das sich an diese Überlegungen anschließt und nun leicht lösbar ist. Zur Lösung der Aufgabe geht man von folgender Überlegung aus: Durch P_0 denkt man sich eine Hilfsgerade bzw. eine Hilfsebene parallel zu der gegebenen Geraden g bzw. zu der gegebenen Ebene E. Die Hilfsgerade bzw. die Hilfsebene hat die Gleichung

$$\vec{n}^0\,\vec{r} - \vec{n}^0\,\vec{r}_0 = 0$$

$\vec{n}^0\,\vec{r}_0 = d_0$ gibt den Abstand dieser Hilfsgeraden bzw. Hilfsebene vom Nullpunkt an. Bezüglich der Lage von P_0 und damit auch der Lage der Hilfsgeraden bzw. der Hilfsebene gibt es drei Möglichkeiten.

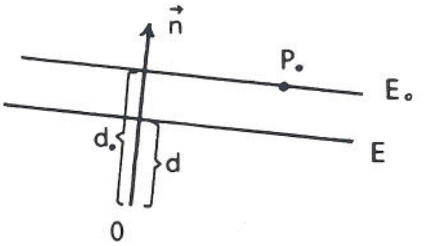


Abb.1

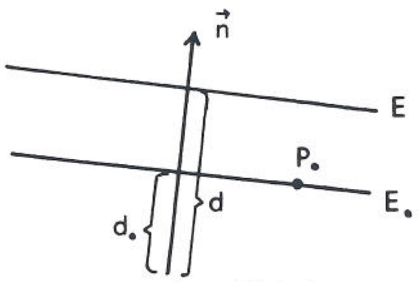


Abb.2

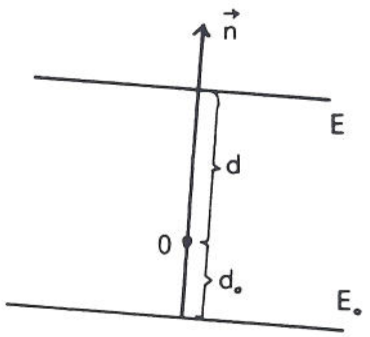


Abb.3

zu Bild 1: P_0 und der Nullpunkt liegen auf verschiedenen Seiten von g bzw. E. d und d_0 haben positive Vorzeichen und es ist $d_0 > d$.

zu Bild 2: Die Hilfsgerade g_o bzw. die Hilfsebene E_o liegen zwischen Nullpunkt und g bzw. E. d und d_o haben positive Vorzeichen und es ist $d_o < d$.

zu Bild 3: Der Nullpunkt liegt zwischen g_o bzw. E_o und g bzw. E. Jetzt ist $d > 0$ und $d_o < 0$.

Man sieht nun sehr leicht ein, daß

$$|d_o - d| = |e|$$

den gesuchten Abstand angibt.

Die Differenz $d_o - d = e$ sagt darüberhinaus etwas aus über die Lage von P_o in bezug auf die Gerade g bzw. die Ebene E. Ist $e > 0$, so liegen Nullpunkt und P_o auf verschiedenen Seiten von g bzw. E. Liegen der Nullpunkt und P_o auf derselben Seite von g bzw. E, so ist $e < 0$.

Aus den bisherigen Überlegungen kann nun das Verfahren zur Abstandsberechnung angegeben werden: In die Hessesche Normalform der Geraden- bzw. Ebenengleichung $\vec{n}^o\,\vec{r} - \vec{n}^o\,\vec{r}_1 = 0$ setzt man den Ortsvektor $\vec{r}_o$ von P_o ein. Da P_o nicht auf g bzw. E liegt, ist diese Gleichung nicht erfüllt. Das bedeutet $\vec{n}^o\,\vec{r}_o - \vec{n}^o\,\vec{r}_1 \neq 0$.

Es ist aber $|\vec{n}^o\vec{r}_o - \vec{n}^o\,\vec{r}_1| = |d_o - d_1| = |e|$ der gesuchte Abstand des Punktes P_o von der Geraden bzw. von der Ebene.

Beispiel:

Gesucht ist der Abstand des Punktes P_o (1/4/-2) von der Ebene $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ (siehe vorangehendes Beispiel)

Der Vektor $\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene. Die Normalenform der Ebene ist somit $\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\vec{r} - 14 = 0$. Für die Hessesche Normalform ergibt sich: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\vec{r} - 2 = 0$. Der Abstand des Punktes P_o von der Ebene ist demnach

$$\left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \right| = \left| \frac{1}{7} (-28) - 2 \right| = 6$$

P_o hat den Abstand 6. $d_o = -4$ und $d = 2$ haben verschiedene Vorzeichen. P_o und der Nullpunkt liegen also auf der gleichen Seite der Ebene. (Es handelt sich um den in Bild 3 dargestellten Fall).

3.6.1 Aufgaben

A. 58

Gegeben sind die drei Punkte P_1 (7/5/8), P_2 (11/20/10) und P_3 (1/-16/6)

a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene durch P_1, P_2 und P_3 in der Parameterform an.

b) Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene in der Normalenform an.

A. 59

Gegeben sind die drei Punkte P_1 (-1/3), P_2 (5/-3) und P_3 (6/6).
Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch P_1 und P_2 in der Parameter- und in der Normalenform an. Geben Sie weiter die Gleichung einer Geraden durch P_3 in der Normalenform an, die a) senkrecht zu g ist, b) durch den Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$ geht.

A. 60

Gegeben sind die drei Ebenen

$$E_1 \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \quad -9x + y + 7z = 12$$

$$E_3 \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix} \vec{r} - 100 = 0$$

Welche Lage haben diese Ebenen zueinander?

A. 61

Gegeben ist die Ebene $12x - 4y + 3z = 26$.
Welchen Abstand hat diese Ebene vom Nullpunkt? Welchen Abstand hat der Punkt P_o (36/-13/19) von dieser Ebene?

A. 62

Gegeben ist der Punkt P_1 (3/4/4).
Geben Sie eine Gleichung der Ebene durch P_1 an, die senkrecht zur y-Achse ist.

A. 63

Gegeben ist die Ebene E $6x - 2y - 3z = 14$.
Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die zu E parallel ist und von E den Abstand 4 hat.

A. 64

Bestimmen Sie die Eckpunkte und die Länge der drei Höhen des von den Geraden g_1: $\vec{r} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \end{vmatrix}$, g_2: $-2x + y = -3$ und g_3: $\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \vec{r} = 22$ gebildeten Dreiecks.

3.7 Berechnung von Schnittwinkeln

Die Berechnung von Schnittwinkeln, wenn eine Ebene im Spiel ist, ist ein weiterer Aufgabentyp, für dessen Lösung man den Normalenvektor benötigt. Diese Aufgaben werden jedoch auf Aufgaben zurückgeführt, in denen der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden gesucht ist. Daher wird hier diese Aufgabe vorangestellt.

Wenn die beiden Geradengleichungen in der Parameterform g_1: $\vec{r}_I = \vec{r}_1 + t_1 \vec{a}_1$ bzw. g_2: $\vec{r}_{II} = \vec{r}_2 + t_2 \vec{a}_2$ gegeben sind, berechnet man den Schnittwinkel mit Hilfe des Skalarproduktes $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ nach der Formel

$$\cos \sphericalangle(g_1, g_2) = \cos \sphericalangle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \left| \frac{\vec{a}_1 \, \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \, |\vec{a}_2|} \right|,$$

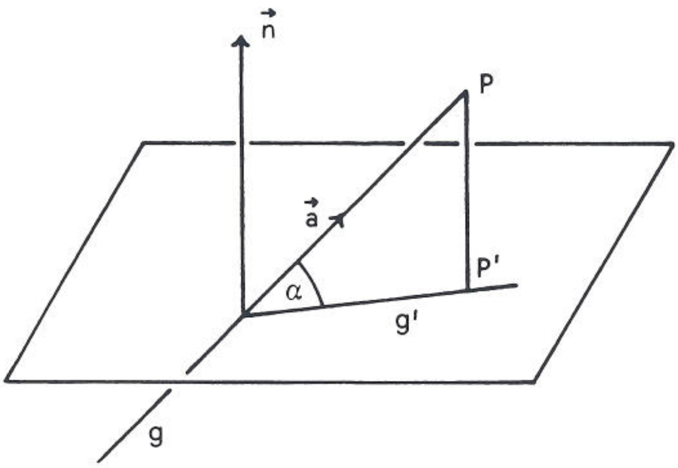
falls die Geraden nicht windschief sind.

Dabei ist $\cos \sphericalangle(g_1 \; g_2) \geq 0$. Man erhält also stets den spitzen Winkel der Geraden.

Liegen die beiden Geraden jedoch in der Koordinatenebene und sind ihre Gleichungen in der Normalenform gegeben, so berechnet man zweckmäßigerweise den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren mit Hilfe der entsprechenden Formel

$$\cos \measuredangle(\vec{n}_1\ \vec{n}_2) = \left| \frac{\vec{n}_1\ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right| ,$$

denn der Winkel zwischen den Normalen zu g_1 und g_2 ist genauso groß wie der Winkel zwischen g_1 und g_2.
Wenn der Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene gesucht wird, so muß zunächst definiert werden, was man unter dem Schnittwinkel in diesem Fall versteht: Der Schnittwinkel einer Geraden g mit einer Ebene E ist der Winkel α zwischen der Geraden g und der Projektion g' von g in die Ebene E.



Sind der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden bekannt, so kann der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ ($\measuredangle\ \vec{a}, \vec{n}$) berechnet werden. Aus dem Bild ersieht man die folgende Beziehung:

$$\measuredangle\ (\vec{a}, \vec{n}) = 90^0 - \alpha$$

Dann ist $\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{n}) = \cos\ (90^0 - \alpha) = \sin \alpha$

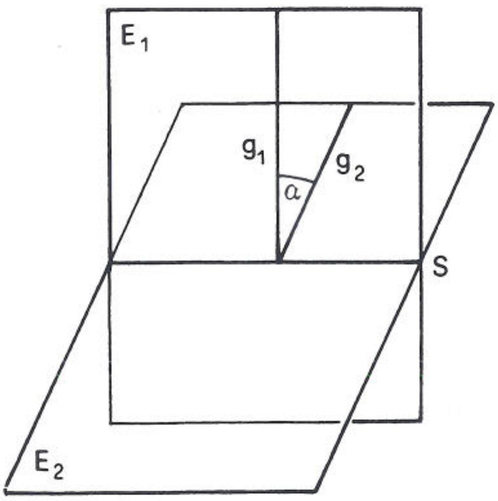
Für den gesuchten Winkel α gilt also

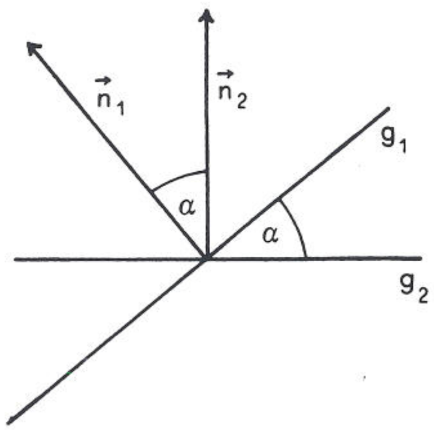
$$\sin \alpha = \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{n}) = \left| \frac{\vec{n}\,\vec{a}}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|} \right|$$

Schließlich soll nun noch definiert werden, wie der Winkel zwischen zwei Ebenen gemessen wird: Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalen dieser beiden Ebenen. Für den Schnittwinkel α gilt demnach

$$\cos \alpha = \cos \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \left| \frac{\vec{n}_1\,\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} \right|$$

Wie man zu dieser Festlegung des Schnittwinkels zweier Ebenen kommt, ergibt sich aus räumlichen Überlegungen. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 sollen sich in s schneiden. Senkrecht zu dieser Schnittgeraden wird eine Hilfsebene H gelegt. Diese Hilfsebene schneidet E_1 in g_1 und E_2 in g_2. g_1 und g_2 schneiden sich in s und schließen den gesuchten Winkel zwischen E_1 und E_2 ein. In dieser Hilfsebene H liegen auch die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ von E_1 und E_2.





Aus Bild 2 - entstanden aus Bild 1 durch Drehung um 90^o - ist zu ersehen, daß der Winkel zwischen g_1 und g_2 gleich dem Winkel zwischen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ ist. Zur Berechnung des Schnittwinkels zweier Ebenen kann man also die beiden Ebenennormalen heranziehen.

3.7.1 AUFGABEN

A. 65

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden g_1 und g_2, wenn

a) g_1 *durch* P_1 $(1/4/1)$ *und* P_2 $(3/-2/4)$ *und durch* P_1 *und* P_3 $(-1/6/2)$ *gehen soll?*

b) g_1 *durch* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{r} - 3 = 0$ *und* g_2 *durch* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *gegeben sind*

c) g_1 *durch* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *und* g_2 *durch* $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ *gegeben sind.*

A. 66

Unter welchem Winkel schneidet die Gerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ *die x-y-Ebene bzw. die y-z-Ebene?*

A. 67

Welchen Winkel schließen die Gerade g $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und die Ebene E* $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *ein?*

A. 68

Welchen Winkel schließt die z-Achse mit der Ebene E

a) $8x - y + 4z = 12$

b) $\begin{matrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{matrix} \; \vec{r} - 3 = 0$

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ein?*

A. 69

Berechnen Sie den Schnittwinkel der x-z-Ebene mit der Ebene E

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \vec{r} = 30$

A. 70

Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2

a) E_1: $4x - 4y + 2z = 9$ $\qquad$ E_2: $2x - 6y + 3z = 7$

b) E_1: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{r} - 8 = 0$ $\qquad$ E_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.8 Schnitte von Geraden und Ebenen (unter Benutzung der Normalenformen)

Abschließend sollen noch einmal Schnittgebilde zwischen Geraden und Ebenen bestimmt werden, diesmal aber unter Einbeziehung der Normalenformen der Geraden- und der Ebenengleichung.

a) Schnittpunkt zweier Geraden (für einen Sonderfall)

Die eine Gerade g_1 soll in einer der Koordinatenebenen, zum Beispiel in der x-y-Ebene liegen. Man kann ihre Gleichung dann in der Form $\vec{n}\,\vec{r} = D$ angeben. Die Gleichung der zweiten Geraden g_2 ist in der Parameterform gegeben: $\vec{r} = \vec{r}_2 + t\,\vec{a}$. Liegt nun die Gerade g_2 auch in der x-y-Ebene, so kann man den rechten Term der zweiten Geradengleichung in die Normalenform einsetzen. Man erhält dann für den Schnittpunkt S

$$\vec{n}\,(\vec{r}_2 + t_s\,\vec{a}) = D$$

Aus dieser Gleichung kann der Parameterwert t_s für den Schnittpunkt S berechnet werden

$$\vec{n}\,\vec{r}_2 + t_s\,\vec{n}\,\vec{a} = D$$

und wenn $\vec{n}\,\vec{a} \neq 0$ $\qquad t_s = \dfrac{D - \vec{n}\,\vec{r}_2}{\vec{n}\,\vec{a}}$.

$\vec{n}\,\vec{a} = 0$ bedeutet, daß die beiden Geraden parallel liegen. Ist aber $\vec{n}\,\vec{a} \neq 0$, so schneiden sich die beiden Geraden. Für den Schnittpunkt gilt dann

$$r_s = \vec{r}_2 + t_s\,\vec{a}$$

Das gerade beschriebene Verfahren kann man nicht so ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß die in der Parameterform gegebene Gerade g_2 eine beliebige Raumgerade ist. Es läßt sich nur dann anwenden, wenn man vor der Rechnung bereits weiß, daß sich die Geraden schneiden. Dies soll für ein Beispiel erläutert werden:

$$g_1: \quad \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \vec{r} - 1 = 0$$

$$g_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zunächst ist zu beachten, daß man einen zweidimensionalen Vektor - in diesem Fall $\vec{n}$ - nicht mit dreidimensionalen Vektoren multiplizieren kann. Die dritte Koordinate von $\vec{n}$ ist 0. Man setzt nun in die Formel ein und erhält:

$$t_s = \frac{1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1 - 12}{11} = -1$$

Für $t_s = -1$ läßt sich ein Punkt S mit dem Ortsvektor $\vec{r}_s$ ausrechnen: $r_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Punkt S (1/-1/2) kann aber nicht Schnittpunkt der beiden Geraden sein. Er müßte sonst auch auf g_1, also in der x-y-Ebene, liegen. Dies ist aber wegen $z = 2 \neq 0$ sicher nicht der Fall. Die formale Anwendung der Formel führt in diesem Fall zu keinem Ergebnis. Zur Lösung der Aufgabe kann man immer wie folgt vorgehen:
Man berechnet in der beschriebenen Weise t_s. Dann wird t_s in die Parameterform eingesetzt.

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich dann und nur dann, wenn der Punkt, den man erhält, in der Koordinatenebene liegt. Dieser Punkt ist dann der gesuchte Schnittpunkt. Er ist gleichzeitig der Spurpunkt von g_2. Ist der ermittelte Punkt aber nicht Spurpunkt, so sind g_1 und g_2 windschief.

Sind beide Geradengleichungen in der Normalenform gegeben, so erhalten wir zwei Koordinatengleichungen. Das ist ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

Beispiel:

g_1: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{r} = 11$ $\qquad$ g_2: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = 1$

g_1: $x - 2y = 11$

g_2: $2x + 3y = 1$ $\qquad$ $x_s = 5 \quad y_s = -3$

S = (5/-3) ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

b) Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene.

Um den Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene E zu bestimmen, wenn die Geradengleichung in der Parameterform, die Ebenengleichung in der Normalenform gegeben sind, benutzt man wieder das Einsetzungsverfahren

g: $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{a}$ $\qquad$ E: $\vec{n}\,\vec{r} - D = 0$

$$\vec{n}(\vec{r}_1 + t_s\,\vec{a}) - D = 0$$

Man erhält $\quad t_s = \dfrac{D - \vec{n}\,\vec{r}_1}{\vec{n}\,\vec{a}} \quad$ wenn $\vec{n}\,\vec{a} \neq 0$

und $\quad \vec{r}_s = \vec{r}_1 + t_s\,\vec{a}$

Dabei darf $\vec{n}\,\vec{a}$ nicht Null sein. Das ist aber gerade dann der Fall, wenn $\vec{a}$ senkrecht ist zu $\vec{n}$. Die Gerade g ist parallel zur Ebene E oder liegt in der Ebene. Die Gerade g liegt - $\vec{n}\,\vec{a} = 0$ vorausgesetzt - in der Ebene, wenn $\vec{r}_1$ die Ebenengleichung erfüllt, der Punkt P_1 also in der Ebene liegt. Auf die Eingangsbemerkung, daß sich unter Anwendung der Normalenform bei manchen Problemen sehr rasch ein Überblick gewinnen läßt und daß auch die Rechenverfahren schnell zum Ziel führen, sei hier noch einmal hingewiesen.

Ist auch die Geradengleichung in der Normalenform gegeben, so liegt ein Sonderfall insofern vor, als die Gerade einer Koordinatenebene angehört. Zur Berechnung des Schnittpunktes bestimmt man die Spurgerade der Ebene und dann den Schnittpunkt von g mit dieser Spurgeraden. Zur Erläuterung des Verfahrens wird ein Beispiel gerechnet:

$$g: \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\vec{r} - 3 = 0 \qquad E: \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}\vec{r} - 6 = 0$$

Die x-y-Spurgerade der Ebene heißt $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - 6 = 0$,
also $-2x + 4y = 6$

Die Gleichung der Geraden in der Koordinatenform ist
$-2x + 3y = 3$
Daraus ergibt sich für den Schnittpunkt S = (3/3/0)

Auch wenn die Geradengleichung in der Normalenform und die Ebenengleichung in der Parameterform gegeben sind, bestimmt man zunächst die Spurgerade der Ebene. Dann berechnet man den Schnittpunkt dieser Spurgeraden mit g.

Auch hier ein Beispiel:

$$g: \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\vec{r} - 3 = 0 \qquad E: \vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Für die x-y-Spurgerade ist z = 0. Also $2 + 3m + n = 0$.
$n = -3m - 2$ wird in die Ebenengleichung eingesetzt. Für die Spurgerade ergibt sich $\vec{r}_{xy} = \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$

Wird $\vec{r}_{xy}$ in die Geradengleichung eingesetzt, so ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für t:

$$\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} + t_s\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right] - 3 = 0 \quad \text{Man erhält } t_s = -1$$

Der Schnittpunkt ist dann der Punkt S = (0/1/0).

c) Schnittgerade zweier Ebenen

Für die Schnittgeradenbestimmung sind zwei Fälle zu diskutieren: 1. Eine Ebene ist in der Normalform, die andere Ebene ist in der Parameterform gegeben. 2. Beide Ebenen sind in der Normalenform gegeben.

Zu 1. E_1: $\vec{n}_1\vec{r} - D = 0$

E_2: $\vec{r} = \vec{r}_2 + m\vec{a} + n\vec{b}$

Man wendet in diesem Fall das Einsetzungsverfahren an und erhält eine Gleichung für m und n aus der sich ein Parameter eliminieren läßt.

$$\vec{n}_1\,\vec{r}_2 + m\,\vec{n}_1\,\vec{a} + n\,\vec{n}_1\,\vec{b} - D = 0$$

$$m = \frac{D - \vec{n}_1\,\vec{r}_2 - n\,\vec{n}_1\,\vec{b}}{\vec{n}_1\,\vec{a}} \qquad \text{wenn } \vec{n}_1 \cdot \vec{a} \neq 0$$

m wird in die Parametergleichung eingesetzt. Das Ergebnis ist die Gleichung der Schnittgeraden mit dem Parameter n. Es dürfen nicht beide Skalarprodukte $\vec{n}_1\,\vec{a}$ und $\vec{n}_1\,\vec{b}$ verschwinden, wenn sich die beiden Ebenen in einer Geraden schneiden sollen. Sind aber diese beiden Produkte Null, so sind die beiden Ebenen parallel. Gilt dann noch $\vec{n}_1\,\vec{r}_2 - D = 0$, so liegt P_2 in E_1. Die beiden Ebenen fallen also zusammen.

Zu 2: Gegeben E_1: $\vec{n}_1\,\vec{r} - D_1 = 0$

E_2: $\vec{n}_2\,\vec{r} - D_2 = 0$

Sind die Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ nicht kollinear - die beiden Ebenen wären sonst parallel oder fielen zusammen - so führt der einfachste Weg zur Bestimmung der Schnittgeraden über die Berechnung der jeweiligen Spurgeraden in zwei Koordinatenebenen. Die Spurgeraden schneiden sich in je einem Punkt. Die Verbindungslinie der beiden Spurpunkte ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Abschließend zwei Beispiele:

Zu 1: Gegeben: E_1 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\vec{r} - 9 = 0$

E_2 $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

Man berechnet

$$m = \frac{9 - 7 - n(-4)}{2} = 1 + 2\,n$$

Damit ergibt sich die Schnittgerade

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}4\\5\\14\end{pmatrix}$$

Zu 2: Gegeben: $E_1 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{r} - 8 = 0$

$E_2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{r} - 6 = 0$

Die x-y-Spurgeraden sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{r} - 8 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{r} - 6 = 0$$

Daraus erhält man das Gleichungssystem

$$2x + 2y - 8 = 0$$
$$x + 3y - 6 = 0$$

mit der Lösung $x = 3$, $y = 1$; also den Schnittpunkt S_1 (3/1/0).

Die x-z-Spurgeraden sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{r} - 8 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{r} - 6 = 0$$

Als Lösung des Systems

$$2x - z - 8 = 0$$
$$x - z - 6 = 0$$

erhält man $x = 2$, $z = -4$; also den Schnittpunkt S_2 (2/0/-4).

Die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte Schnittgerade:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.8.1 Aufgaben

A. 71

Untersuchen Sie, ob sich die Geraden g_1 und g_2 schneiden. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) g_1: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{r} = 5$ $\qquad$ g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) g_1: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{r} = 8$ $\qquad$ g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) g_1: $-2x + 3y = 4$ $\qquad$ g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

d) g_1: $2x + 3y = 3$ $\qquad$ g_2: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{r} - 15 = 0$

A. 72

Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu der Ebene E. Bestimmen Sie falls möglich, den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.

a) g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = 0$

b) g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \vec{r} = 1$

c) g: $-x + 2y = 6$ $\qquad$ E: $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{matrix} \vec{r} + 2 = 0$

d) g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) g: $x - 2y = 1$ $\qquad$ E: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A. 73

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E_1

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ *mit der Ebene E_2*

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{r} = 2$. *Welche besondere Lage hat die Schnittgerade ?*

A. 74

Wo liegen die gemeinsamen Punkte der Ebenen $E_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{r} = 5$ und $E_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \vec{r} = -4$?

A. 75

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2 und E_3.

$$E_1: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = 17 \qquad E_3: \quad 2x - y + 3z + 4 = 0$$

A. 76

Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die parallel zu der Ebene $E \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = 6$ ist und durch den Punkt P (2/7/-4) geht.

4 Lösung von Gleichungssystemen Determinanten. Cramersche Regel

Einige Probleme in den vorangehenden Kapiteln führten auf lineare Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten. Solche Systeme können mit Hilfe von Determinanten gelöst werden. Auch einige Operationen konnten mit Hilfe von Determinanten in übersichtlicher und einprägsamer Weise dargestellt werden. In diesem Kapitel soll daher eine Einführung in die Theorie der Determinanten erfolgen. Theorie und Kalkül der Determinanten werden allerdings nur so weit aufgebaut, wie es für das Verständnis der Voraussetzungen und Anwendungen in diesem Heft notwendig ist. Daher wird auch nur an einigen wenigen Stellen ein Ausblick bzw. ein Hinweis auf Allgemeingültigkeit gegeben.

4.1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten Zweireihige Determinanten

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten bilden ein Gleichungssystem. Das Gleichungssystem

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = c_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = c_2$$

mit den beiden Unbekannten x_1 und x_2 hat die Lösung

$$x_1 = \frac{c_1\, a_{22} - c_2\, a_{12}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

und $$x_2 = \frac{c_2\, a_{11} - c_1\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}$$

Dabei muß der Nenner $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \neq 0$ sein.

Die Lösung des Systems kann mit Hilfe des Determinantenkalküls anders geschrieben werden.

Man bezeichnet das Symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

als zweireihige Determinante und versteht darunter eine Zahl, die wie folgt berechnet wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Die horizontal nebeneinander stehenden Zahlen in einer Determinante bilden eine Zeile. Die vertikal übereinanderstehenden Zahlen bilden eine Spalte. Die zweireihige Determinante hat zwei horizontale Reihen, also zwei Zeilen, und zwei vertikale Reihen, also zwei Spalten. Eine Determinante ist immer ein System, in dem die Zahlen quadratisch angeordnet sind. Die zweireihige Determinante setzt sich aus 4 Zahlen zusammen. Diese Zahlen nennt man Elemente.
In das quadratische System lassen sich zwei Diagonalen einbringen: die Diagonale von links oben nach rechts unten und die Diagonale von rechts oben nach links unten.

Die Diagonale von links oben nach rechts unten nennt man Hauptdiagonale, die Diagonale von rechts oben nach links unten nennt man Nebendiagonale. Zur Berechnung der Determinante bildet man das Produkt der beiden Elemente der Hauptdiagonalen und subtrahiert das Produkt der beiden Elemente der Nebendiagonalen. Also:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Nach diesen Erklärungen kann man nun leicht nachrechnen, daß die Lösung des Systems

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = c_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = c_2$$

wie folgt geschrieben werden kann.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

Dabei muß die Nennerdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sein.}$$

Die Nennerdeterminante wird aus den Koeffizienten der Variabeln gebildet. Sie heißt deshalb Koeffizientendeterminante und wird üblicherweise kurz mit D bezeichnet.

Die Determinanten im Zähler erhält man, indem man jeweils eine Spalte der Koeffizientendeterminante durch die freien Koeffizienten c_1 und c_2 ersetzt. In D_1 ist die erste Spalte, die aus den Koeffizienten von x_1 gebildet wird, und in D_2 ist die zweite Spalte, die aus den Koeffizienten von x_2 gebildet wird, ersetzt worden. Diese Regel nennt man Cramersche Regel.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= 14 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 14 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 14}{8 + 1} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{28 - 1}{8 + 1} = 3$$

Die beiden linearen Gleichungen eines zweireihigen Systems können geometrisch als die Gleichungen von zwei Geraden aufgefaßt werden. Die Lösung des Systems ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden. Wenn $D = 0$ ist, läßt sich das System nicht lösen. Die beiden Geraden sind dann echt parallel (keine Lösung) oder fallen zusammen (es gibt dann ∞^1 Lösungen).

4.2 Determinanten dritten Grades

Ziel ist es nun, den Determinantenbegriff so zu erweitern, daß sich auch Systeme mit mehr als zwei Variablen nach derselben Methode lösen lassen.

Die Verallgemeinerungen und Definitionen werden in diesem Heft nur für die dreireihige Determinante getroffen. Das lineare Gleichungssystem von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten soll dann mit Hilfe dreireihiger Determinanten gelöst werden.

Die Koeffizienten in dem System

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = c_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = c_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = c_3$$

bilden die dreireihige Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Die dreireihige Determinante ist also aus 9 Elementen zusammengesetzt, die in drei Zeilen und in drei Spalten ungeordnet sind. Die beiden Diagonalen in der Determinante nennt man - wie schon bei der zweireihigen Determinante - Hauptdiagonale und Nebendiagonale. Die Regel von Sarrus gibt an, wie eine dreireihige Determinante ausgerechnet wird. Man schreibt die beiden ersten Spalten rechts neben die Determinante. Dann entstehen parallel zu der Hauptdiagonalen in schräger Richtung noch zwei Reihen mit jeweils drei Elementen. Man bildet nun das Produkt der drei in der Hauptdiagonalen stehenden Elemente und addiert dazu die Produkte der drei in den beiden parallelen Reihen stehenden Elemente. Auch zur Nebendiagonalen gibt es zwei parallele Reihen in schräger Richtung mit jeweils drei Elementen.
Von der bisher gebildeten Summe werden nun das Produkt der drei Elemente in der Nebendiagonalen und die beiden aus den je drei Elementen der Parallelen zur Nebendiagonalen

subtrahiert. $$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Bei entsprechender Übung können die Produkte auch berechnet werden, ohne daß die beiden Spalten noch einmal neben die Determinante geschrieben werden. Die Regel von Sarrus gilt nur für dreireihige Determinanten. Bei der Berechnung vier- und mehrreihiger Determinanten muß man anders vorgehen.

Die folgenden Sätze werden für die dreireihige Determinante formuliert. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen (Übung). Die Sätze gelten auch für zweireihige Determinanten und vor allem auch für mehrreihige Determinanten. Da die Sarrussche Regel jedoch nicht für vier- und mehrreihige Determinanten gilt, müssen zum Beweis der Allgemeingültigkeit dieser Sätze allgemeinere Methoden entwickelt werden. Die Herleitung solcher Methoden würde in diesem Rahmen zu weit führen. Für die dreireihige Determinante genügt der Beweis durch Verifikation, das heißt durch Nachrechnen. Der Hinweis auf die Allgemeingültigkeit mag an dieser Stelle genügen.

Satz 1:

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man die Zeilen mit den Spalten vertauscht. (Man nennt diese Operation "spiegeln an der Hauptdiagonalen".)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Den Beweis dieses Satzes - wie auch der übrigen Sätze - mag der Leser zur Übung selbst führen, indem er die Determinanten ausrechnet und die Ergebnisse vergleicht.

Satz 2:

Wenn in einer Determinante zwei parallele Reihen (Zeilen oder Spalten) vertauscht werden, ändert die Determinante ihr Vorzeichen. Zum Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Satz 3:

Eine Determinante wird mit einer Zahl multipliziert, indem die Elemente einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert werden. Zum Beispiel:

$$n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & n\,a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & n\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & n\,a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ na_{21} & na_{22} & na_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Umgekehrt kann also auch aus den Elementen einer Reihe ein Faktor ausgeklammert werden.

Satz 4:

Sind in einer Determinante die Elemente zweier paralleler Reihen gleich oder proportional, so hat die Determinante den Wert Null.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ n\,a_{11} & n\,a_{12} & n\,a_{13} \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

Beweis: Man denkt sich in der rechts stehenden Determinante die erste und dritte Zeile vertauscht. Nach Satz 2 gilt dann: $D = -D$, woraus $D = 0$ folgt.

Satz 5:

Ist in einer Determinante jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Elemente, so läßt sich die Determinante als Summe zweier Determinanten schreiben.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Satz 6:

Sind in einer Determinante die Elemente einer Reihe eine Linearkombination aus den Elementen paralleler Reihen, so hat die Determinante den Wert Null.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ma_{11}+na_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ma_{21}+na_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ma_{31}+na_{32} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ma_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ma_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ma_{31} \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & na_{12} \\ a_{21} & a_{22} & na_{22} \\ a_{31} & a_{32} & na_{32} \end{vmatrix}}_{0}$$

Satz 7:

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+n\,a_{11} & a_{32}+n\,a_{12} & a_{33}+n\,a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ n\,a_{11} & n\,a_{12} & n\,a_{13} \end{vmatrix}}_{0}$$

Satz 8:

Satz 6 ist umkehrbar: Hat eine Determinante den Wert Null, so sind die Elemente irgendeiner Reihe eine Linearkombination aus den Elementen paralleler Reihen.

Beweis: (Der Beweis wird für die dritte Zeile durchgeführt)

$$\text{Voraussetzung:} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D = 0$$

Behauptung: Die Elemente der dritten Zeile sind eine Linearkombination der Elemente der beiden anderen Zeilen.

$$a_{31} = m\, a_{11} + n\, a_{21}$$

$$a_{32} = m\, a_{12} + n\, a_{22}$$

$$a_{33} = m\, a_{13} + n\, a_{23}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist:} \quad m = \frac{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{21} \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Das System ist dann eindeutig lösbar, wenn m und n auch die dritte Gleichung erfüllen.

$$a_{33} = \frac{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{21} \\ a_{32} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}\, a_{13} + \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}\, a_{23}$$

Die Gleichung wird mit der Nennerdeterminante multipliziert. Wenn man dann ausrechnet und umordnet ergibt sich:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{22}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=0$$

Der links stehende Term ist D und nach Voraussetzung Null. Die dritte Gleichung ist also auch erfüllt. Das Gleichungssystem ist also lösbar. Für jede andere Reihe kann der Beweis ebenso geführt werden.

Satz 9:

Eine Determinante wird durch Entwickeln nach den Elementen einer Reihe berechnet.

Das bedeutet: Neben der Sarrusschen Regel kann man zur Berechnung einer dreireihigen Determinante eine andere Methode anwenden: Man bildet für eine Reihe die Produkte der einzelnen Elemente mit ihren zugehörigen Unterdeterminanten. Die zu einem Element gehörende Unterdeterminante entsteht, wenn man in der ursprünglichen Determinante die Zeile und die Spalte streicht, in der das Element steht. Die nicht gestrichenen Elemente bilden die Unterdeterminante. Die Produkte der Elemente mit ihren Unterdeterminanten werden addiert, wenn die Summe der Indices des Elementes gerade ist, sie werden subtrahiert, wenn die Summe der Indices ungerade ist.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Zu a_{21} gehört die Unterdeterminante:

$$U_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Das Produkt $a_{21}\ U_{21}$ wird subtrahiert, weil $2 + 1 = 3$ ungerade ist.

Entwickelt man die Determinante nach der ersten Spalte, so erhält man:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Durch Entwickeln nach der zweiten Spalte erhält man:

$$D = - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Die Richtigkeit läßt sich durch Ausrechnen nachweisen.

Wie schon erwähnt, können vier- und mehrreihige Determinanten nicht nach der Sarrusschen Regel berechnet werden. Hier ist es dann möglich, die Determinanten durch Entwicklung nach einer Reihe zu berechnen.

4.3 Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten. Cramersche Regel

Das lineare System

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= c_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= c_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

hat unter der Voraussetzung, daß die Koeffizientendeterminante $D \neq 0$ ist, die Lösung

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

und $$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{23} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_3}{D}$$

Die Cramersche Regel besagt: Die Unbekannten werden als Quotienten zweier Determinanten berechnet. Die Nennerdeterminante ist die Koeffizientendeterminante. Diese muß von Null verschieden sein, wenn das System eine eindeutige Lösung haben soll. Die Zählerdeterminanten für die jeweilige Unbekannte erhält man, indem man in der Koeffizientendeterminante die Koeffizienten der Unbekannten durch die freien Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 ersetzt. Zur Berechnung von x_2 zum Beispiel muß in der Koeffizientendeterminante die zweite Spalte durch die freien Koeffizienten c_1, c_2, c_3 ersetzt werden.

Auf die Berechnung des Systems für den Fall, daß die Koeffizientendeterminante D = 0 ist, soll hier weiter nicht eingegangen werden.

Die drei linearen Gleichungen des Systems können als drei Ebenengleichungen aufgefaßt werden. Im allgemeinen Fall schneiden sich drei Ebenen in einem Punkt. Die Lösung des Systems gibt dann die Koordinaten des Schnittpunktes an. Der Fall D = 0 beinhaltet Sonderlagen der Ebenen: Es kann sein, daß die drei Ebenen sich in einer Geraden schneiden oder daß zwei oder alle drei Ebenen parallel sind oder daß zwei bzw. alle drei Ebenen zusammenfallen.

Wegen ihrer großen Bedeutung bei der Berechnung von linearen Gleichungssystemen soll abschließend wenigstens teilweise die Cramersche Regel hergeleitet werden.

Für das gegebene System

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

werden x_2 und x_3 aus den beiden ersten Gleichungen ausgerechnet und in die dritte Gleichung eingesetzt. So erhält man eine Gleichung für x_1.

Aus

$$\begin{aligned} a_{11} x_1+a_{12} x_2+a_{13} x_3 &= c_1 \\ a_{21} x_1+a_{22} x_2+a_{23} x_3 &= c_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} a_{12} x_2+a_{13} x_3 &= c_1-a_{11} x_1 \\ a_{22} x_2+a_{23} x_3 &= c_2-a_{21} x_1 \end{aligned}$$

erhält man, wenn $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_{11}\,x_1 & a_{13} \\ c_2 - a_{21}\,x_1 & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & c_1 - a_{11}\,x_1 \\ a_{22} & c_2 - a_{21}\,x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

Diese Werte werden in die dritte Gleichung eingesetzt.

$$a_{31}x_1 + \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{13} \\ c_2 & a_{23} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} a_{32} + \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & c_1 \\ a_{22} & c_2 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} a_{33} = c_3$$

oder

$$a_{31}x_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} c_1 & a_{13} \\ c_2 & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & c_1 \\ a_{22} & c_2 \end{vmatrix} - a_{33}x_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Durch Umordnen erhält man

$$x_1 \left(a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) =$$

$$c_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} c_1 & a_{13} \\ c_2 & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Dies ist aber nichts anderes als

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

oder $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$ wenn $D \neq 0$ ist.

In der gleichen Art und Weise können x_2 und x_3 berechnet werden. So ist dann die Richtigkeit der Cramerschen Regel nachgewiesen.

Eine Nebenbemerkung ist noch erforderlich: Es mußte vorausgesetzt werden $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$.

Dies bedeutet keine einschneidende Einschränkung. Man kann etwa mit der ersten und dritten Gleichung beginnen, wenn diese Determinante verschwindet. Dann muß allerdings $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ sein. Ist auch diese Determinante Null, beginnt man mit der zweiten und dritten Gleichung. $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ist dann aber sicher von Null verschieden. Denn wenn alle diese Determinanten gleichzeitig Null sind, dann ist $D = 0$. Es wurde aber $D \neq 0$ vorausgesetzt. Für die Berechnung von x_2 und x_3 gilt abgewandelt entsprechendes.

Drei Beispiele sollen dieses Kapitel abschließen.

1. Gegeben
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 16 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Es ist

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -4(15-16)-3(10+12)-2(-8-9) = -28$$
(Entwicklung nach der dritten Spalte)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 16 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3(-6+20)-4(-32-8)-3(80+6) = -56$$
(Entwicklung nach der zweiten Zeile)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 16 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4(48-12)+2(6+12)-2(-6-48) = 0$$
(Entwicklung nach der dritten Zeile)

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 3 & -4 & -3 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 16+36+240-256+18+30 = +\ 84$$
(Sarrussche Regel)

Man erhält: $x_1 = 2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -3$

2. Gegeben

$$
\begin{aligned}
-18x_1 - 14x_2 + 20x_3 &= -22 \\
12x_1 - 4x_2 + 40x_3 &= 28 \\
-6x_1 - 7x_2 + 16x_3 &= -5
\end{aligned}
$$

In diesem System ist $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Die Cramersche Regel ist nicht anwendbar. Die drei Gleichungen können als Gleichungen von Ebenen aufgefaßt werden. Wir setzen $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$. Die Gleichungen der drei Ebenen in der Normalenform lauten dann

$$E_1: \quad \begin{pmatrix} -18 \\ -14 \\ 20 \end{pmatrix} \vec{r} + 22 = 0$$

$$E_2: \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 40 \end{pmatrix} \vec{r} - 28 = 0$$

$$E_3: \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} \vec{r} + 5 = 0$$

Die Koeffizientendeterminante wird aus den drei Normalvektoren gebildet. Die Vektoren sind nicht kollinear, die Ebenen also nicht parallel. Wenn $D = 0$ ist, müssen die Normalenvektoren komplanar sein. Es kann nun sein, daß sich die drei Ebenen in einer Geraden schneiden. Es kann aber auch sein, daß es keine Punkte gibt, die allen drei Ebenen gleichzeitig angehören. Der Leser kann sich diesen Sachverhalt mit Hilfe von drei Blättern Papier, die in geeigneter Weise gehalten werden, klarmachen.
Um festzustellen, welcher Fall vorliegt, wird zuerst die Schnittgerade zweier Ebenen ermittelt. Dann wird anschließend die Lage dieser Geraden zur dritten Ebene untersucht.

Die Schnittgerade von E_1 und E_2 wird nach der Spurpunktmethode ermittelt:

Der Schnittpunkt der Spurgeraden

$$\begin{aligned} -18x - 14y &= -22 \\ 12x - 4y &= 28 \end{aligned}$$

ist $S_{xy} = (2/-1/0)$.

Der Schnittpunkt der Spurgeraden

$$\begin{aligned} -14y + 20z &= -22 \\ -4y + 40z &= 28 \end{aligned}$$

ist $S_{yz} = (0/3/1)$

Die Schnittgerade von E_1 und E_2 ist also

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade liegt entweder parallel zu E_3 oder in E_3. Sie kann E_3 nicht in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt wäre dann der Schnittpunkt der drei Ebenen und das Gleichungssystem müßte genau eine Lösung haben (nämlich die Koordinaten dieses Punktes). Wir untersuchen, ob der Punkt $S_{xy} = (2/-1/0)$ in E_3 liegt. Es ist $\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 = 0$.

Der Punkt S_{xy} liegt also in der Ebene. Die Gerade liegt also in E_3. Dazu zeigen wir noch, daß das Skalarprodukt aus dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene den Wert Null hat. Es ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = 0$.

Die drei Ebenen schneiden sich also in dieser Geraden. Es gibt also unendlich viele Punkte, die gleichzeitig in allen drei Ebenen liegen. (Man sagt, das Gleichungssystem hat in diesem Fall ∞^1 Lösungen)

3. Gegeben

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -6 \\ -x_1 \phantom{{}-x_2{}} + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 3x_1 \phantom{{}+x_2+x_3{}} + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Es soll dieses System mit vier Unbekannten berechnet werden. Dieses Beispiel soll gleichsam als Ausblick dienen. Es soll zeigen, daß auch in diesem Fall die Cramersche Regel gilt. Darüberhinaus wird gezeigt, wie man eine Determinante vierten Grades mit Hilfe von Unterdeterminanten berechnet.

Es ist jetzt:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 9 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 9 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

Die Lösung des Systems ist also $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -3$.

Lösungen der Aufgaben und Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1

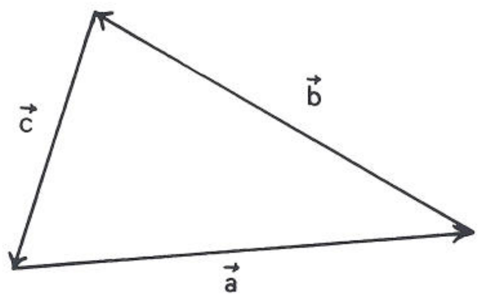
Die Gleichung $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ist im allgemeinen Fall falsch: Die Summe der Längen zweier Dreieckseiten ist größer als die Länge der dritten Seite.

Aufgabe 2

Die Gleichung $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ist dann und nur dann richtig, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben.
Die Gleichung $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ist ebenfalls dann und nur dann richtig, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben und $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$

Aufgabe 3

Wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ einen "geschlossenen Streckenzug" bilden (siehe Skizze), gilt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$



Aufgabe 4

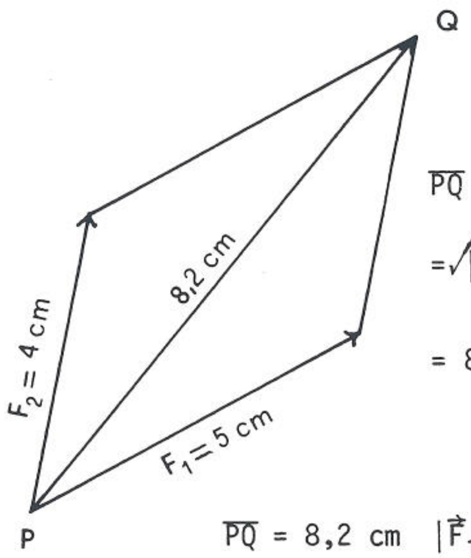
$|\vec{a} + \vec{b}| = 8$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$

Aufgabe 5

$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{FC} = \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{HB} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{GE} = -\vec{a} - \vec{b}$

Aufgabe 6



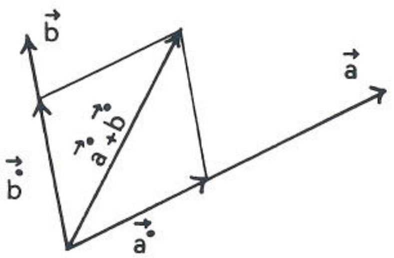
$\overline{PQ} = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$

$= \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2| \cos 130^0}$

$= 8{,}17$ N

$\overline{PQ} = 8{,}2$ cm $\quad |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 8{,}2$ N

Aufgabe 7



Die Figur, die durch die Vektoren $\vec{a}^o$ und $\vec{b}^o$ aufgespannt wird, ist ein Rhombus. Die Diagonale im Rhombus ist die Winkelhalbierende.

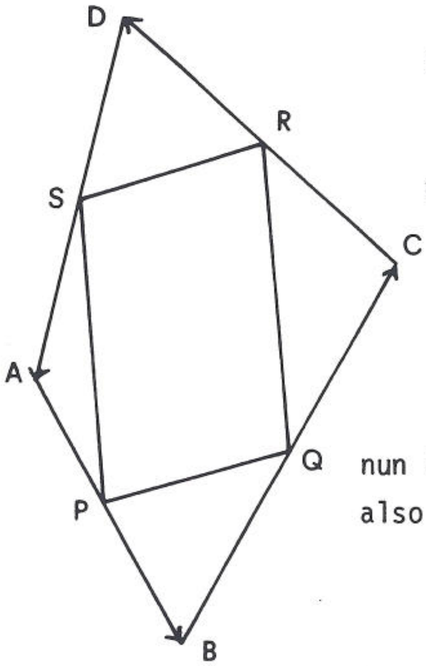
Aufgabe 8

a) $|\vec{a}^o| + |\vec{b}^o| = 2$

$|\vec{a}^o + \vec{b}^o| = \sqrt{1 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})}$ dieser Wert ist nicht immer gleich 2. Anschaulich: Die Länge der Diagonalen im Rhombus ist nicht gleich der Summe der Seitenlängen.

b) $|\vec{a}^o + \vec{b}^o| = |\vec{a}^o| + |\vec{b}^o|$ ist dann und nur dann richtig, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben. ($\measuredangle\ \vec{a}, \vec{b} = 0$!)

Aufgabe 9



Behauptung: $\vec{PQ} = \vec{SR}$

$\vec{PS} = \vec{QR}$

Beweis: $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$

$\vec{SR} = -\vec{RS} = -(\frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA})$

$\vec{PQ} - \vec{SR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA})$

nun ist $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

also $\vec{PQ} = \vec{SR}$

Ebenso gilt $\vec{QR} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$

$\vec{PS} = -\vec{SP} = -(\frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB})$

$\vec{QR} - \vec{PS} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AB}) = \vec{0}$

also $\vec{QR} = \vec{PS}$

q.e.d.

Aufgabe 10

1) $\vec{a} = 3\,\vec{b}$ kann richtig sein

2) $\vec{a}^{o} = 1$ ist falsch (1 ist kein Vektor)

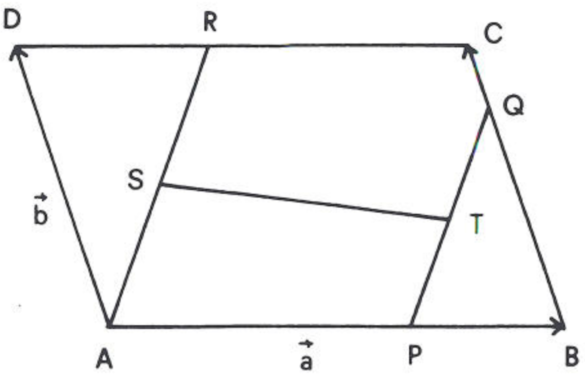
3) $\vec{a}^{o} = -\vec{b}^{o}$ kann richtig sein

4) $\vec{a} - 2 = \vec{b}$ ist falsch (siehe 2)

5) $|\vec{a}^{o}| = |\vec{b}^{o}|$ ist immer richtig

6) $|\vec{a}^{o}| - |\vec{b}^{o}| = |\vec{a}^{o} - \vec{b}^{o}|$ kann richtig sein

Aufgabe 11



$\vec{PB} = \frac{1}{3}\vec{a}$

$\vec{BQ} = \frac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{PQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

$$\vec{AR} = m\,\vec{PQ} = m\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = n\,\vec{a} + \vec{b}$$

$$\frac{1}{3}m\,\vec{a} + \frac{3}{4}m\,\vec{b} = n\,\vec{a} + \vec{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}m = n \\ \frac{3}{4}m = 1 \end{array}\right\} \quad m = \frac{4}{3} \qquad n = \frac{4}{9}$$

R teilt $\vec{DC}$ von D aus im Verhältnis 4 : 5

$$\frac{1}{2}\vec{AR} + \vec{ST} = \vec{AP} + \frac{1}{2}\vec{PQ}$$

$$\begin{aligned} \vec{ST} &= \vec{AP} + \frac{1}{2}\vec{PQ} - \frac{1}{2}\vec{AR} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} - \frac{2}{9}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{11}{18}\vec{a} - \frac{1}{8}\vec{b} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

$$\vec{b} = m_1\,\vec{a} + n_1\,\vec{c}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = m_1\begin{pmatrix}1\\7\\-9\end{pmatrix} + n_1\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= m_1 + 2n_1 \\ 2 &= 7m_1 - n_1 \\ -2 &= -9m_1 + 3n_1 \end{aligned}$$

Das System ist erfüllt durch $m_1 = \frac{1}{3}$ $n_1 = \frac{1}{3}$

$$\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\vec{c} = m_2\,\vec{a} + n_2\,\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = m_2\begin{pmatrix}1\\7\\-9\end{pmatrix} + n_2\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 &= m_2 + n_2 \\ -1 &= 7m_2 + 2n_2 \\ 3 &= -9m_2 - 2n_2 \end{aligned}$$

Das System ist erfüllt durch $m_2 = -1$ $n_2 = 3$

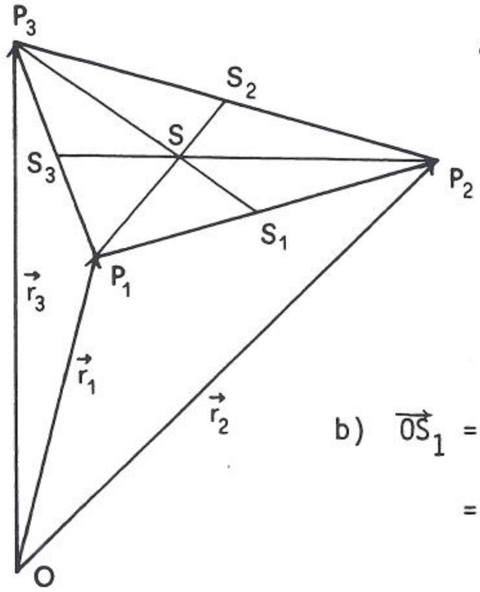
$$\vec{c} = -\vec{a} + 3\,\vec{b}$$

Die Aufgabe ergänzt das Zahlenbeispiel.

Aufgabe 13

$$2\,\vec{a} + 4\,\vec{b} = 14\,\vec{e}_x - 12\,\vec{e}_y - 6\,\vec{e}_z$$

$$3\,\vec{a} - 2\,\vec{b} = 5\,\vec{e}_x + 14\,\vec{e}_y - 17\,\vec{e}_z$$



Aufgabe 14

a) $\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_2P_3}=\vec{r}_3-\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_1P_3}=\vec{r}_3-\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OS}_1 = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$= \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$

c) Allgemeine Lösung (kann überschlagen werden - die rechnerische Lösung befindet sich am Ende)

P_1S_2 und P_2S_3 sollen sich in S schneiden.

$$\vec{OS} = \vec{r}_1 + n_1\overrightarrow{P_1S_2} = \vec{r}_1+n_1(\vec{OS}_2-\vec{OP}_1)=\vec{r}_1 + n_1\,\frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2}$$

$$\vec{OS} = \vec{r}_2 + n_2\overrightarrow{P_2S_3} = \vec{r}_2+n_2(\vec{OS}_3-\vec{OP}_2)=\vec{r}_2 + n_2\,\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_3-2\vec{r}_2}{2}$$

n_1 und n_2 müssen berechnet werden. Dazu setzt man

$$\vec{r}_1 + n_1\,\frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2} = \vec{r}_2 + n_2\,\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_3-2\vec{r}_2}{2}$$

Daraus erhält man die drei Gleichungen

$$x_1 + n_1\,\frac{x_2+x_3-2x_1}{2} = x_2 + n_2\,\frac{x_1+x_3-2x_2}{2}$$

$$y_1 + n_1\,\frac{y_2+y_3-2y_1}{2} = y_2 + n_2\,\frac{y_1+y_3-2y_2}{2}$$

$$z_1 + n_1\,\frac{z_2+z_3-2z_1}{2} = z_2 + n_2\,\frac{z_1+z_3-2z_2}{2}$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man $n_1 = \frac{2}{3} \quad n_2 = \frac{2}{3}$

Es wird nun angenommen, daß sich P_1S_2 und P_3S_1 in S' schneiden. Dann gilt

$$OS' = \vec{r}_1+m_1\,\overrightarrow{P_1S_2} = \vec{r}_1+m_1(\vec{OS}_2-\vec{OP}_1) = \vec{r}_1+m_1\,\frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2}$$

$$OS' = \vec{r}_3 + m_3\, P_3\vec{S}_1 = \vec{r}_3 + m_3(\overrightarrow{OS}_1 - \overrightarrow{OP}_3) = \vec{r}_3 + m_3\, \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2-2\vec{r}_3}{2}$$

Durch Gleichsetzen bekommt man

$$r_1 + m_1\, \frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2} = r_3 + m_3\, \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2-2\vec{r}_3}{2}$$

Dies ist wieder ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen. Hieraus erhält man $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_3 = \frac{2}{3}$. Das heißt nun $n_1 = m_1$ und infolgedessen S = S'. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.

Wenn dieser Sachverhalt - als aus der Elementargeometrie bekannt - vorausgesetzt wird, kann der Beweis weggelassen werden. Für den Schwerpunkt gilt dann die Formel:

$$\vec{OS} = \vec{r}_1 + \frac{2}{3}\,\frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3-2\vec{r}_1}{2} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}$$

$$\vec{OS} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix}$$

S hat die Koordinaten S $(\frac{2}{3}/0/3)$.

Aufgabe 15

Es ist $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{12^2+(-3)^2+4^2}$ N = 13 N

Aufgabe 16

a) $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}$ $\quad$ $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear

b) Alle vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sind komplanar.

Aufgabe 17

a) Wenn x = -8 und z = 6 sind, gilt $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

b) Aus $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & y \\ 3 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 0$ folgt y = 10

Aufgabe 18

Die Zerlegung ist möglich, wenn gilt

$$\vec{F} = (m\,\vec{a} + n\,\vec{b})N$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{pmatrix}-12\\1\\10\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$$

Man erhält $m = -3$ und $n = 2$

Dann ist $\vec{F}_a = -3\,\vec{a}\,N$ und $\vec{F}_b = 2\,\vec{b}\,N$

Also $\vec{F} = -3\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}N + 2\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}N$

Aufgabe 19

a) $|\vec{a}| = 9 \qquad |\vec{b}| = 9$

b) $\vec{a}^o = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} \qquad \vec{b}^o = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix}$

c) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{4+56-16}{81} = \dfrac{44}{81} \rightarrow \sphericalangle\,\vec{a}, \vec{b} = 57^0$

Aufgabe 20

a) $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0 \qquad \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} = 0$ q.e.d.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\y\\1\end{pmatrix} = 6 + 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -5$

Aufgabe 21

a) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{8}} \rightarrow \sphericalangle\,\vec{a}, \vec{b} = 82{,}45^0$

b) $\vec{a}\cdot\vec{e}_x = \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 4 \qquad \vec{b}\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

c) $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{e}_x) = \dfrac{4}{\sqrt{29}\cdot 1} \rightarrow \quad (\vec{a}, \vec{e}_x) = 42^0$

$\cos \sphericalangle(\vec{b}, \vec{e}_y) = 0 \qquad \vec{b} \perp \vec{e}_y \qquad \sphericalangle(\vec{b}, \vec{e}_y) = 90^0$

$\vec{c}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und senkrecht zu $\vec{b}$. *Aufgabe 22*

Also $\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6 + y + 5z = 0$

und $\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 + 2y - 2z = 0$

Es ergibt sich $y = -4$ und $z = 2$

a) Es gilt $\vec{b}_a = |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ *Aufgabe 23*

$$\vec{b}_a = |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{a}^0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

ebenso $\vec{a}_b = |\vec{a}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\vec{b}^0 = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

b) $\vec{b}_a = \dfrac{90}{225} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a}_b = \dfrac{90}{81} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{10}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & \vec{e}_x \\ -1 & 4 & \vec{e}_y \\ 3 & -2 & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ +25 \\ +15 \end{pmatrix}$ *Aufgabe 24*

$\begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

also $\vec{a} \times \vec{b}$ ist $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$

$A_{ABC} = \dfrac{1}{2} |\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$ FE $= \dfrac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$ FE $= \sqrt{6}$ FE *Aufgabe 25*

Aufgabe 26

$$\left[4\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\right]\times\left[2\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}27\\-10\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-14\\-16\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-220\\-308\\-572\end{pmatrix}$$

$$(4\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}-4\vec{b}) = 6(\vec{b}\times\vec{a}) - 16(\vec{a}\times\vec{b}) = -22(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$= -22\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = -22\begin{pmatrix}10\\14\\26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-220\\-308\\-572\end{pmatrix}$$

Aufgabe 27

$$m\begin{vmatrix}a_x & b_x & \vec{e}_x\\ a_y & b_y & \vec{e}_y\\ a_z & b_z & \vec{e}_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}m\,a_x & b_x & \vec{e}_x\\ m\,a_y & b_y & \vec{e}_y\\ m\,a_z & b_z & \vec{e}_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_x & m\,b_x & \vec{e}_x\\ a_y & m\,b_y & \vec{e}_y\\ a_z & m\,b_z & \vec{e}_z\end{vmatrix}$$

q.e.d.

Aufgabe 28

a) $(\vec{e}_x\times\vec{e}_z)\times\vec{e}_x = -\vec{e}_y\times\vec{e}_x = \vec{e}_z$

b) $(\vec{e}_x\times\vec{e}_z)\times(\vec{e}_x+\vec{e}_y) = -\vec{e}_y\times(\vec{e}_x+\vec{e}_y) = \vec{e}_z$

c) $(\vec{e}_x+\vec{e}_z)\times(\vec{e}_x+\vec{e}_y) = \begin{vmatrix}1 & 1 & \vec{e}_x\\ 0 & 1 & \vec{e}_y\\ 1 & 0 & \vec{e}_z\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\+1\\+1\end{pmatrix} = -\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z$

Aufgabe 29

a) $(4\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_z)\times\vec{e}_x = -2\,\vec{e}_y$ Vektor in y-Richtung

b) $(4\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_z)\times\vec{e}_y = 2\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_z$ Vektor in x-z-Ebene

c) $(4\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_z)\times\vec{e}_z = -4\,\vec{e}_y$ Vektor in y-Richtung

Aufgabe 30

$\vec{a}\times\vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$, deswegen ist $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ ebenso ist $\vec{a}\times\vec{b}$ senkrecht zu $\vec{b}$, also $\vec{b}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

Aufgabe 31

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -19$ $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Linkssystem

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 18$ $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

Aufgabe 32

a) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \vec{a} = 3\,\vec{b} - 2\,\vec{c}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -42$ $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind nicht komplanar

c) $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear $\rightarrow \vec{c} = -2\vec{b}$; $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind komplanar

Aufgabe 33

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -37$ $\quad V = 37$ VE

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 80$ $\quad V = 80$ VE

Aufgabe 34

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ b_z \end{pmatrix} = -8 + 20 - 3\,b_z = 0 \qquad b_z = 4$

$\vec{a}$ ist senkrecht zu $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & \vec{e}_x \\ 5 & 4 & \vec{e}_y \\ -3 & 4 & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = 1824 \qquad V = 1824$ VE

Aufgabe 35

a) $(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -12 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

b) $(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & -1 \\ -4 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_1P_3}$ sind kollinear. P_1, P_2, P_3 liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 36

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) P_3 liegt auf dieser Geraden. ($t = -2$)

c) S_{xy} (1,5/-8/0); S_{xz} (2,5/0/6); S_{yz} (0/-20/9)

Aufgabe 37

g_1 ist parallel zu g_4

g_2 und g_3 fallen zusammen

Aufgabe 38

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow t = 2$ und $y_4 = -3$, $z_4 = 6$

Aufgabe 39

a) $Z = 0 \rightarrow t = 1 \qquad S_{xy} = (3/3/0)$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{a}$; $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{e}_z) = \frac{-3}{\sqrt{14}}$; $\sphericalangle\, \vec{a}\, \vec{e}_z = 143{,}3^0$

Winkel zwischen $\vec{a}$ bzw. g und x-y-Ebene: $53{,}3^0$

Aufgabe 40

a) $E_{P_1P_2P_3}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

für $m = -\frac{5}{4}$ und $n = -\frac{3}{2}$ ergibt sich P (-4/3/-7) = P_4

b) $G_{P_1P_2}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $G_{P_3P_4}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

S (-1/-3/-1)

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}}{\sqrt{56}\,\sqrt{225}} = \frac{30}{15\,\sqrt{56}} \qquad \varphi = 74{,}5^0$$

Aufgabe 41

a) Für alle Punkte der Geraden gilt $z = 0$, deshalb liegt g in der x-y-Ebene.

b) $y = -2x + 7$

c) $\vec{a} = \binom{-1}{2}$ $\qquad m = \dfrac{a_y}{a_x} = -2$

Aufgabe 42

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m\,\vec{a} + n(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

P_3 (9/-3/-1) liegt nicht in der Ebene

P_4 (1/3/-4) liegt in der Ebene ($m = -1$, $n = 0$)

Aufgabe 43

Für alle Punkte der x-y-Ebene muß gelten $Z = 0$. Es gibt beliebig viele Gleichungen, die die x-y-Ebene angeben:

z.B. $\vec{r} = m\,\vec{e}_x + n\,\vec{e}_y$

oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das gleiche gilt für die x-z-Ebene: $y = 0$

z.B. $\vec{r} = m\,\vec{e}_x + n\,\vec{e}_z$

oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Auch in diesem Fall gibt es beliebig viele Gleichungen:

z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 44

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45

Die Geraden sind nicht parallel. Sie liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden:

$$\begin{pmatrix}-7\\-1\\4\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\14\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich in S (1/3/2). (m = 2 und n = -3)

Ebenengleichung: $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$

Aufgabe 46

Ebene durch P_1P_2 und P_3:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + m(\vec{r}_2-\vec{r}_1) + n(\vec{r}_3-\vec{r}_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}$$

Die Gleichung wird nicht durch die Koordinaten von P_4 erfüllt. P_4 liegt also nicht in dieser Ebene.

Ebene durch P_2P_3 und P_4:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + m(\vec{r}_3-\vec{r}_2) + n(\vec{r}_4-\vec{r}_2) = \begin{pmatrix}3\\-7\\4\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-2\\7\\-9\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\4\\-8\end{pmatrix}$$

Aufgabe 47

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-1\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

Der Punkt P_4 (3/10/6) liegt in der Ebene (m = 2, n = 1); also g_4 liegt in der Ebene

Aufgabe 48

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-10\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\14\\-21\end{pmatrix} \rightarrow S\ (-6/-2/-6)$$

Aufgabe 49

a) Die Gerade verläuft parallel zur Ebene
b) Die Gerade verläuft parallel zur Ebene

Aufgabe 50

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 33 \\ 2 & 4 & -24 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -808 \quad 0 \neq P_o \text{ liegt also nicht in der Ebene.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Lot: } \vec{r}_L = \begin{pmatrix} 31 \\ -23 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: L (-1/1/-10)

Aufgabe 51

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -33 \\ 1 & -6 & 17 \\ 12 & -18 & -5 \end{vmatrix} = -2618 \qquad V_T = \frac{1}{6} \cdot 2618 \text{ VE}$$

$$E_{P_1P_2P_3}: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Lot: $\vec{r}_L = \begin{pmatrix} -34 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 54 \\ -48 \\ 4 \end{pmatrix}$ Lotfußpunkt: L = (-7/-8/-4)

Abstand $d = \sqrt{1309}$ LE

Aufgabe 52

a) Gegeben sind die x-z-Spurgerade und die y-z-Spurgerade

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) S (1/4/10)

Aufgabe 53

$$E_1: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 54

Die Schnittgerade $\vec{r}_s = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist parallel zu den gegebenen Geraden. Sie fällt darüberhinaus auf die Gerade g_4. (Sonderfall)

E_2 liegt parallel zu E_1; E_3 fällt mit E_1 zusammen. *Aufgabe 55*

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *Aufgabe 56*

$S_{xz} = (\frac{5}{4}/0/\frac{5}{2})$ und $S_{xy} = (4/-3/0)$ sind Spurpunkte der Schnittgeraden *Aufgabe 57*

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ -3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ ist die Schnittgerade

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -6 \\ -21 \\ -2 \end{pmatrix}$ *Aufgabe 58*

b) $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{r} = 112$

$G_{P_1P_2}$: $\vec{r} = \binom{-1}{3} + t \binom{6}{-6}$; $\binom{6}{6} \vec{r} = 12$ *Aufgabe 59*

Gerade durch P_3 senkrecht zu $g_{P_1P_2}$: $\binom{6}{6} \vec{r} = 72$

Gerade durch P_3 und den Mittelpunkt von $\overline{P_1P_2}$: $\binom{6}{-4} \vec{r} = 12$

E_1 und E_3 fallen zusammen; E_2 ist parallel dazu. *Aufgabe 60*

$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \vec{r} = 2$ Der Abstand vom Nullpunkt beträgt 2 LE *Aufgabe 61*

$$\left| \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ -13 \\ 19 \end{pmatrix} - 2 \right| = \left| \frac{541}{13} - \frac{26}{13} \right| = \frac{515}{13} = 39{,}6$$

Der Abstand des Punktes von der Ebene ist 39,6 LE

$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Stellungsvektor der Ebene

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{r} = 4$

Aufgabe 62

$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{r} = 6$

Aufgabe 63

$S_{g_1 g_2} = (2/1)$; $S_{g_1 g_3} = (6/2)$; $S_{g_2 g_3} = (4/5)$

$h_{g_3} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$ LE; $h_{g_2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ LE; $h_{g_1} = \frac{14\sqrt{17}}{17}$ LE

Aufgabe 64

a) $\sphericalangle(g_1, g_2) = 128{,}25^\circ$

b) g_1 und g_2 fallen zusammen

c) g_1 und g_2 sind senkrecht zueinander

Aufgabe 65

Winkel mit der x-y-Ebene $21{,}8^\circ$
Winkel mit der y-z-Ebene $33{,}85^\circ$

Aufgabe 66

$21{,}6^\circ$

Aufgabe 67

a) $26{,}4^\circ$ b) $26{,}4^\circ$ c) 90° (Die Ebene ist parallel zur x-y-Ebene!)

Aufgabe 68

a) Die Ebene ist parallel zur x-z-Ebene
b) $19{,}47^\circ$

Aufgabe 69

a) $25{,}2^\circ$ b) $41{,}82^\circ$

Aufgabe 70

Aufgabe 71

a) g_1 und g_2 fallen zusammen

b) g_1 und g_2 schneiden sich senkrecht in $(\frac{19}{13} / -\frac{22}{13})$

c) (1 / 2)

d) (3 / -1)

Aufgabe 72

a) S (1/2/3) $\qquad \varphi = 58{,}2^0$

b) S $(\frac{6}{74} / \frac{51}{74} / \frac{29}{74})$ $\qquad \varphi = 90^0$

c) S (-2/2/0) $\qquad \varphi = 41{,}6^0$

d) g liegt (echt) parallel zu E

e) S (9/4/0) $\qquad \varphi = 14^0$

Aufgabe 73

$$\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}5\\-4\\-3\end{pmatrix}\right] = 2 \rightarrow n = -1$$

$\vec{r} = \begin{pmatrix}-6\\7\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix}$. Die Schnittgerade ist senkrecht zum Normalenvektor von E_2 und parallel zu einem Richtungsvektor von E_1.

Aufgabe 74

$$S_{xy} = (-1/2/0); \quad S_{xz} = (\frac{21}{17} / 0 / \frac{22}{17}) \rightarrow r = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{38}{17}\\-2\\\frac{22}{17}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 75

S = (5/8/-2)

Aufgabe 76

Die Ebene ist bestimmt durch $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ und P (2/7/-4)

$$\rightarrow \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} \vec{r} = 14$$